

# Vorkurs Mathematik

## Übungen zu Polynomgleichungen

### 1 Aufgaben

#### Lineare Gleichungen

**Aufgabe 1.1** Ein Freund von Ihnen möchte einen neuen Mobilfunkvertrag abschließen. Es gibt zwei verschiedene Angebote:

- Anbieter 1: monatl. Grundgebühr: 10€, Minutenpreis: 0,10€ (alle Netze).
- Anbieter 2: monatl. Grundgebühr: 5€, Minutenpreis: 0,20€ (alle Netze).

Abgesehen davon, dass es vielleicht bessere Angebote irgendwo in diesem Universum gibt: Ab wieviel Gesprächsminuten pro Monat sollte Ihr Freund sich für Anbieter 1 entscheiden?

**Aufgabe 1.2** Berechnen sie den Schnittpunkt der Geraden die durch  $y = 3x + 2$  und  $y = -2x + 1$  gegeben sind.

#### Quadratische Gleichungen

**Aufgabe 1.3** Hat das Polynom  $x^2 + 2$  eine Nullstelle? Wieviele (verschiedene!) Nullstellen hat  $x^2 - 4x + 4$ ? Verwenden Sie einmal die  $p$ - $q$ -Formel und einmal die Diskriminante.

**Aufgabe 1.4** Berechnen sie die Nullstellen von

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| a) $2x^2 + 7x + 3$ | c) $x^2 - 2x - 15$ |
| b) $3x^2 + 7x - 6$ | d) $x^2 - 2x$      |

**Aufgabe 1.5** Faktorisieren Sie

- |                   |              |
|-------------------|--------------|
| a) $x^2 - 3x + 2$ | c) $x^2 + x$ |
| b) $x^2 + 3x + 2$ | d) $x^2 + 1$ |

Tipp: Prüfen Sie vorher (mittels Diskriminante) ob das Polynom wirklich in lineare Faktoren zerfällt.

#### Polynomgleichungen dritten grades

**Aufgabe 1.6** Berechnen sie die Nullstellen von

- |                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ | c) $x^3 - 4x^2 + 4x$ |
| b) $x^3 + 6x^2 - x - 6$  | d) $x^3 - 1$         |

## Polynomgleichungen aus rationalen Gleichungen

In den folgenden Aufgaben müssen die rationalen Gleichungen durch Multiplikation mit dem Hauptnenner in Polynomgleichungen umgeformt werden.

Beim Multiplizieren mit dem Hauptnenner gehen *keine* Lösungen verloren, *es können aber neue Lösungen entstehen*. Es gibt also möglicherweise Lösungen der *neuen Polynomgleichung*, die nicht Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind! Machen Sie also mit allen Lösungen der Polynomgleichung eine Probe in der Ausgangsgleichung!

**Beispiel:** Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung  $\frac{x+2}{2x-1} = \frac{4x-1}{x}$ .

[Ausgangsgleichung]	$\frac{4x-1}{x} = \frac{x+2}{2x-1} \quad   \cdot x \cdot (2x-1)$
[Polynomgleichung]	$\Rightarrow (4x-1)(2x-1) = (x+2)x$
	$\Leftrightarrow 8x^2 - 6x + 1 = x^2 + 2x \quad   -x^2 - 2x$
	$\Leftrightarrow 7x^2 - 8x + 1 = 0$
[Normalform]	$\Leftrightarrow x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{1}{7} = 0$
[p-q-Formel]	$\Leftrightarrow x_{1/2} = -\left(-\frac{4}{7}\right) \pm \sqrt{\frac{16}{49} - \frac{7}{49}} = \frac{4}{7} \pm \frac{3}{7}$
	$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{7} \quad x_2 = 1$

Probe: Einsetzen der Lösungen in den Hauptnenner. Falls sich 0 ergibt, so ist die Lösung unzulässig, weil dann in der Ausgangsgleichung durch Null geteilt werden würde.

$$x_1 \cdot (2x_1 - 1) = \frac{1}{7} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{7} - 1\right) \neq 0 \quad \text{und} \quad x_2 \cdot (2x_2 - 1) = 1 \cdot (2 - 1) \neq 0.$$

Also sind  $\frac{1}{7}$  und 1 tatsächlich Lösungen der Ausgangsgleichung.

**Aufgabe 1.7** Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung

$$\frac{2x+1}{x-3} + \frac{3x-5}{x+3} = \frac{2x^2+2x+18}{x^2-9}.$$

Tipp: Der Hauptnenner ist  $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$  und hat nur Grad 2!

**Aufgabe 1.8** Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} = -\frac{2x+1}{x^2-4x+3}.$$

Tipp: Der Hauptnenner ist  $(x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3$  und hat nur Grad 2!

**Aufgabe 1.9** Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung

$$\frac{2x+3}{x-1} + \frac{4x+5}{x+1} = \frac{6x^2+6x-2}{x^2-1}.$$

Tipp: Welche Punkte sind *keine* Lösung?

## 2 Lösungen

### Lösung zu Aufgabe 1.1

*Aufstellen der Linearen Gleichung*

Die monatlichen Gesamtkosten beider Mobilverträge sind lineare Polynome in der Variable  $x$ , die für die monatlich „vertefonierten“ Minuten steht:

- Anbieter 1: monatl. Kosten:  $f(x) = 10 + 0,1 \cdot x$ .
- Anbieter 2: monatl. Kosten:  $g(x) = 5 + 0,2 \cdot x$ .

Offensichtlich ist Anbieter 2 billiger, wenn man nur „wenig“ telefoniert. Dies kann man prüfen in dem man die Monatskosten ausrechnet, die entstehen wenn man gar nicht telefoniert:  $f(0) = 10 > 5 = g(0)$ .

*Lösen der Linearen Gleichung*

Ab wieviel Monats-Telefonier-Minuten lohnt es sich aber zu Anbieter 1 zu wechseln? Gesucht ist der Punkt  $x$  an dem gilt:  $f(x) = g(x)$ , dieser Wert berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \\ \Leftrightarrow 5 + 0,2 \cdot x &= 10 + 0,1 \cdot x && \quad \parallel -5 \quad - (0,1 \cdot x) \\ \Leftrightarrow 0,1 \cdot x &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= 5 \cdot 10 = 50 \end{aligned}$$

*Antwort*

Ab 50 telefonierten Gesprächsminuten (und mehr) pro Monat lohnt es sich den Vertrag bei Anbieter 1 abzuschließen.

### Lösung zu Aufgabe 1.2

Der Schnittpunkt der beiden Geraden liegt bei dem  $x$ -Wert, der für beide Geraden den selben  $y$ -Wert liefert. Entsprechend setzen wir die beiden Werte gleich, um  $x$  zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 3x+2 &= -2x+1 && \quad \mid +2x \quad -2 \\ \Leftrightarrow 5x &= -1 && \quad \mid :5 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Um den zugehörigen  $y$ -Wert auszurechnen setzen wir  $x$  in  $y = 3x + 2$  ein:

$$y = 3 * \left(-\frac{1}{5}\right) + 2 = \frac{7}{5}$$

**Lösung:** Der Schnittpunkt beider Geraden liegt bei  $(x, y) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ .

### Lösung zu Aufgabe 1.3

$x^2 + 2$  Diskriminante:  $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$  (keine Lösung).

$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$  Diskriminante:  $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$  (exakt eine Lösung).

### Lösung zu Aufgabe 1.4

Ausgangspolynom	Faktorisierung	Nullstellen
a) $2x^2+7x+3$	$= 2(x + 1/2)(x + 3)$	$-1/2, -3$
b) $3x^2+7x-6$	$= 3(x - 2/3)(x + 3)$	$2/3, -3$
c) $x^2-2x-15$	$= (x - 5)(x + 3)$	$5, -3$
d) $x^2-2x$	$= x(x - 2)$	$0, 2$

### Lösung zu Aufgabe 1.5

Ausgangspolynom	Faktorisierung	Nullstellen
a) $x^2 - 3x + 2$	$= (x - 1)(x - 2)$	1, 2
b) $x^2 - 3x + 2$	$= (x + 1)(x + 2)$	-1, -2
c) $x^2 + x$	$= x(x + 1)$	0, -1
d) $x^2 + 1$	keine	keine

Das Polynom  $x^2 + 1$  hat die Diskriminante  $-4$ . es hat also keine Nullstellen und ist damit nicht faktorisiert.

### Lösung zu Aufgabe 1.6

Ausgangspolynom	Faktorisierung	Nullstellen
a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$	$= (x + 1)(x - 2)(x + 3)$	-1, 2, -3
b) $x^3 + 6x^2 - x - 6$	$= (x + 1)(x - 1)(x + 6)$	-1, 1, -6
c) $x^3 - 4x^2 + 4x$	$= x(x - 2)^2$	0, 2
d) $x^3 - 1$	$= (x - 1)(x^2 + x + 1)$	1

Das Polynom  $x^2 + x + 1$  hat negative Diskriminante  $((1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0)$ . Es ist also nicht weiter faktorisiert.

### Lösung zu Aufgabe 1.7

Man beachte das  $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$  gilt. Der Hauptnenner ist hier also  $(x - 3)(x + 3)$

$$\frac{2x+1}{x-3} + \frac{3x-5}{x+3} = \frac{2x^2+2x+18}{x^2-9} \quad || \cdot (x-3)(x+3)$$

Polynomgleichung

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (2x+1)(x+3) + (3x-5)(x-3) = 2x^2 + 2x + 18 \\ \Leftrightarrow & 2x^2 + 7x + 3 + 3x^2 - 14x + 15 = 2x^2 + 2x + 18 \\ \Leftrightarrow & 5x^2 - 7x + 18 = 2x^2 + 2x + 18 \quad || - 2x^2 - 2x - 18 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 - 9x = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 3x = 0 \quad \text{[Normalform]} \\ \Leftrightarrow & x_{1/2} = -(-\frac{3}{2}) \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 0} \quad \text{[p-q-Formel]} \\ \Leftrightarrow & x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Statt die  $p-q$ -Formel zu verwenden kann man auch am Schluss Faktorisieren:  $x^2 - 3x = x(x - 3)$ . So sieht man auch, dass die Lösungen der Polynomgleichung  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 3$  lauten. Die Probe (Einsetzen in den Hauptnenner) liefert:

$$(x_1 - 3)(x_1 + 3) = (-3) \cdot (3) = 9 \neq 0 \quad \text{und} \quad (x_2 - 3)(x_2 + 3) = (3 - 3)(3 + 3) = 0.$$

**Lösung:** Also ist nur 0 eine zulässige Lösung der Ausgangsgleichung.

### Lösung zu Aufgabe 1.8

Man beachte das  $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$  gilt. Der Hauptnenner ist hier also  $(x - 1)(x - 3)$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} = -\frac{2x+1}{x^2-4x+3} \quad || \cdot (x-1)(x-3)$$

Polynomgleichung

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 3(x-3) - 2(x-1) = -(2x+1) \\ \Leftrightarrow & 3x - 9 - 2x + 2 = -2x - 1 \\ \Leftrightarrow & x - 7 = -2x - 1 \quad || + 2x + 7 \\ \Leftrightarrow & 3x = 6 \quad || : 3 \\ \Leftrightarrow & x = 2 \end{aligned}$$

Lösungen der Polynomgleichung  $x_1 = 2$ . Die Probe (Einsetzen in den Hauptnenner) liefert:

$$(x_1 - 1)(x_1 - 3) = (2 - 1) \cdot (2 - 3) = (1)(-1) \neq 0$$

**Lösung:** Also ist 2 eine zulässige Lösung der Ausgangsgleichung.

**Lösung zu Aufgabe 1.9**

Man beachte das  $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$  gilt. Der Hauptnenner ist hier also  $(x - 1)(x + 1)$

$$\frac{2x+3}{x-1} + \frac{4x+5}{x+1} = \frac{6x^2+6x-2}{x^2-1} \quad \| \cdot (x-1)(x+1)$$

Polynomgleichung

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (2x+3)(x+1) + (4x+5)(x-1) = 6x^2 + 6x - 2 \\ \Leftrightarrow & 2x^2 + 5x + 3 \quad 4x^2 + x \quad -5 = 6x^2 + 6x - 2 \\ \Leftrightarrow & \qquad \qquad \qquad 6x^2 + 6x \quad -2 = 6x^2 + 6x - 2 \quad \| - 6x^2 - 6x + 2 \\ \Leftrightarrow & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 = 0 \end{aligned}$$

Hier erhalten wir am Schluß eine wahre Aussage (“Null gleich Null” gilt stets!), die nicht von  $x$  abhängt. Dies bedeutet, dass die Polynomgleichung für *jedes*  $x$  erfüllt ist, d.h. diese Polynomgleichung gilt stets<sup>1</sup>. Die Lösungsmenge der Polynomgleichung ist also ganz  $\mathbb{R}$ .

Welche Lösungen sind zulässig für die Ausgangsgleichung?

Antwort: Alle außer den Nullstellen des Hauptnenners:

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

Dies sind die Werte  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$ . Die Ausgangsgleichung gilt also für alle  $x$ , außer  $x = 1$  und  $x = -1$ . **Lösung:** Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist  $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ .

---

<sup>1</sup>Eine andere Polynomgleichung, die stets erfüllt ist ist z.B.  $x^2 + 1 = x^2 + 1$