Aufgaben zu Exponentialgleichungen

Definition Logarithmus: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Logarithmengesetze

1. Logarithmengesetz: $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

2. Logarithmengesetz: $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$

3. Logarithmengesetz: $\log_b(x^m) = m \cdot \log_b(x)$

Weitere wichtige Regeln: $\log_b(x)$ ist nur definiert für x > 0 !

$\log_b 1 = 0$ für jede Basis b > 0

Kurzschreibweise: $\log_{10} x = \log x$

Die Lösung von Exponentialgleichungen erfolgt (leider) nicht immer nach demselben Muster.
In den folgenden Aufgaben könnt ihr aufgrund der Anweisungen in der Aufgabenstellung entnehmen, wie ihr zum Ziel kommt.
In der letzten Aufgabe kommen die Lösungsmethoden vermischt vor und ihr müsst selbst herausfinden, wie die Gleichung zu lösen ist.

Aufgabe 1:
Löse die folgenden Exponentialgleichungen durch Logarithmieren (Anwendung des 3. Logarithmengesetzes). Runde das Ergebnis gegebenenfalls auf vier Nachkommastellen.

a) $4^x = 0{,}5$ b) $9^{x+3} = 2187$ c) $64^{x+2} = 16$ d) $4 \cdot 7^{2x} = 5$

e) $4^{-x} = 256$ f) $5 \cdot 4^x + 3000 = 17 \cdot 4^x - 72$ g) $400 - 2^x = 4496 - 5 \cdot 2^x$

h) $2^{(x^2)} = 512$

Aufgabe 2:
Löse die folgenden Exponentialgleichungen durch Logarithmieren (Anwendung aller Logarithmengesetze). Runde das Ergebnis gegebenenfalls auf vier Nachkommastellen.

a) $3^{5x-3} = 2^{3x+5}$ b) $2^{x+1} = 4^{x-1}$ c) $8 \cdot 12^{x-1} = 7 \cdot 10^{x-1}$

d) $8^{x-1} = 7 \cdot 5^x$ e) $2 \cdot 8^{x+1} = 16^{x-1}$ f) $7 \cdot 3^{x+2} = 2 \cdot 9^{2x-3}$

Aufgabe 3:
Löse die folgenden Exponentialgleichungen durch geschicktes Ausklammern. Runde das Ergebnis gegebenenfalls auf vier Nachkommastellen.

a) $2^{x+3} + 2^{x-1} = 272$ b) $9^{2x+3} = 6562 - 9^{2x-1}$ c) $3^{x+1} - 12 = 18 - 3^{x-1}$

d) $25^{x+0{,}5} - 25^x - 12000 = 25^{x-0{,}5} - 125$ e) $16^{x+1} - 16^{x-0{,}5} = 16^{x+0{,}25} + 440$

Aufgabe 4:
Bringe die auftretenden Potenzen auf eine gemeinsame Basis und löse die Exponentialgleichungen durch geschicktes Ausklammern. Runde das Ergebnis gegebenenfalls auf vier Nachkommastellen.

a) $2^{2x+1} + 4^{x-1} = 2304$
b) $9^{x-3} - 3^{2x-3} = 3^{2x-7} - 79$
c) $2^{4x-5} + 16^{x+0,25} = 4^{2x-0,5} + 98$
d) $81^{x+0,25} + 9^{2x-0,5} = 3^{4x} + 21$

Aufgabe 5:
Löse die Exponentialgleichung durch Gleichsetzen der Exponenten (=Hochzahlen). Runde das Ergebnis gegebenenfalls auf vier Nachkommastellen.

a) $3^{x-1} = 3^{4x-5}$
b) $3^{\frac{4}{x}} = 3^{x}$
c) $5^{\sqrt{x-4}} = 5^{\sqrt{2-x}}$
d) $2^{2x-3} = 32$
e) $(2^{x})^{x+1} = 4$
f) $3^{3x+1} = 1$
g) $2^{3x-2} = 0,5$
h) $5^{3-2x} = \frac{1}{125}$

Aufgabe 6:
Löse die Exponentialgleichung durch Substitution. Runde das Ergebnis gegebenenfalls auf vier Nachkommastellen.

a) $4^{x} - 12 \cdot 4^{-x} = 1$
b) $3 \cdot 16^{x} + 128 \cdot 16^{-x} = 100$
c) $3 \cdot 2^{2x} - 15 \cdot 2^{x} = 198$
d) $2^{4x} + 8 = 6 \cdot 2^{2x}$
e) $3 \cdot 25^{x} = 8 \cdot 5^{x} - 5$
f) $16^{x} + 16 = 10 \cdot 4^{x}$
g) $2^{x+2} + 2^{1-x} = 6$
h) $3^{2x-1} + 3^{x+2} = 30$

Aufgabe 7:
Löse die Exponentialgleichung. Runde das Ergebnis gegebenenfalls auf vier Nachkommastellen.

a) $2^{x+5} + 2^{x-2} = 129$
b) $2^{4x} - 6 \cdot 2^{2x} = -8$
c) $4 \cdot 3^{2x+1} = 7 \cdot 5^{x}$
d) $2 \cdot 5^{x} + 3 \cdot 5^{-x} = 5$
e) $9^{\sqrt{3x-4}} = 3^{\sqrt{2x+1}}$
f) $3^{4x+1} + 81^{x+1} = 9^{2x-1}$

Musterlösungen

Aufgabe 1:

a) $4^x = 0{,}5 \Rightarrow \log(4^x) = \log 0{,}5 \Rightarrow x \cdot \log 4 = \log 0{,}5 \Rightarrow x = \frac{\log 0{,}5}{\log 4} = -0{,}5$

b) $9^{x+3} = 2187 \Rightarrow (x+3)\cdot \log 9 = \log 2187 \Rightarrow x = \frac{\log 2187}{\log 9} - 3 = 0{,}5$

c) $64^{x+2} = 16 \Rightarrow (x+2)\cdot \log 64 = \log 16 \Rightarrow x = \frac{\log 16}{\log 64} - 2 = -\frac{4}{3}$

d) $4 \cdot 7^{2x} = 5 \Rightarrow 2x \cdot \log 7 = \log\frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log\frac{5}{4}}{\log 7} \approx 0{,}0573$

e) $4^{-x} = 256 \Rightarrow -x \cdot \log 4 = \log 256 \Rightarrow x = -\frac{\log 256}{\log 4} = -4$

f) $5 \cdot 4^x + 3000 = 17 \cdot 4^x - 72 \Rightarrow 3072 = 12 \cdot 4^x \Rightarrow 4^x = 256 \Rightarrow x = \frac{\log 256}{\log 4} = 4$

g) $400 - 2^x = 4496 - 5 \cdot 2^x \Rightarrow 4 \cdot 2^x = 4096 \Rightarrow 2^x = 1024 \Rightarrow x = \frac{\log 1024}{\log 2} = 10$

h) $2^{(x^2)} = 512 \Rightarrow x^2 \cdot \log 2 = \log 512 \Rightarrow x^2 = \frac{\log 512}{\log 2} = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Aufgabe 2:

a) $3^{5x-3} = 2^{3x+5} \Rightarrow (5x-3)\cdot \log 3 = (3x+5)\cdot \log 2 \Rightarrow 5x \cdot \log 3 - 3x \cdot \log 2 = 5 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3$

$\Rightarrow x \cdot (5\log 3 - 3\log 2) = 5\log 2 + 3\log 3 \Rightarrow x = \frac{5\log 2 + 3\log 3}{5\log 3 - 3\log 2} \approx 1{,}9808$

b) $2^{x+1} = 4^{x-1} \Rightarrow (x+1)\cdot \log 2 = (x-1)\cdot \log 4 \Rightarrow x \cdot \log 2 - x \cdot \log 4 = -\log 4 - \log 2$

$\Rightarrow x \cdot (\log 2 - \log 4) = -\log 4 - \log 2 \Rightarrow x = \frac{-\log 4 - \log 2}{\log 2 - \log 4} = 3$

c) $8 \cdot 12^{x-1} = 7 \cdot 10^{x-1} \Rightarrow \frac{12^{x-1}}{10^{x-1}} = \frac{7}{8} \Rightarrow \left(\frac{12}{10}\right)^{x-1} = \frac{7}{8} \Rightarrow (x-1)\cdot \log 1{,}2 = \log\frac{7}{8}$

$\Rightarrow x = \frac{\log 7/8}{\log 1{,}2} + 1 \approx 0{,}2676$

d) $8^{x-1} = 7 \cdot 5^x \Rightarrow (x-1)\cdot \log 8 = \log 7 + x \cdot \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 8 - x \cdot \log 5 = \log 7 + \log 8$

$\Rightarrow x \cdot (\log 8 - \log 5) = \log 7 + \log 8 \Rightarrow x = \frac{\log 7 + \log 8}{\log 8 - \log 5} \approx 8{,}5645$

e) $2 \cdot 8^{x+1} = 16^{x-1} \Rightarrow \log 2 + (x+1)\log 8 = (x-1)\log 16$

$\Rightarrow x \cdot \log 8 - x \cdot \log 16 = -\log 16 - \log 2 - \log 8 \Rightarrow x \cdot (\log 8 - \log 16) = -\log 16 - \log 2 - \log 8$

$\Rightarrow x = \frac{-\log 16 - \log 2 - \log 8}{\log 8 - \log 16} = 8$

f) $7 \cdot 3^{x+2} = 2 \cdot 9^{2x-3} \Rightarrow \log 7 + (x+2)\log 3 = \log 2 + (2x-3)\log 9$

$\Rightarrow x \cdot (\log 3 - 2 \cdot \log 9) = \log 2 - 3\log 9 - \log 7 - 2\log 3 \Rightarrow x = \dfrac{\log 2 - 3\log 9 - \log 7 - 2\log 3}{\log 3 - 2\log 9} \approx 3{,}0468$

Aufgabe 3:

a) $2^{x+3} + 2^{x-1} = 272 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^{-1} = 272 \Rightarrow 2^x \cdot (2^3 + 2^{-1}) = 272 \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow x = 5$

b) $9^{2x+3} = 6562 - 9^{2x-1} \Rightarrow 9^{2x} \cdot 9^3 + 9^{2x} \cdot 9^{-1} = 6562 \Rightarrow 9^{2x}(9^3 + 9^{-1}) = 6562$

$\Rightarrow 9^{2x} = 9 \Rightarrow x = 0{,}5$

c) $3^{x+1} - 12 = 18 - 3^{x-1} \Rightarrow 3^x \cdot 3^1 + 3^x \cdot 3^{-1} = 30 \Rightarrow 3^x(3 + 3^{-1}) = 30 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

d) $25^{x+0,5} - 25^x - 12000 = 25^{x-0,5} - 125 \Rightarrow 25^x \cdot 5 - 25^x - 25^x \cdot 0{,}2 = 11875$

$\Rightarrow 25^x(5 - 1 - 0{,}2) = 11875 \Rightarrow 25^x = 3125 \Rightarrow x = \dfrac{\log 3125}{\log 25} = 2{,}5$

e) $16^{x+1} - 16^{x-0,5} = 16^{x+0,25} + 440 \Rightarrow 16^x \cdot 16 - 16^x \cdot 0{,}25 - 16^x \cdot 2 = 440$

$16^x(16 - 0{,}25 - 2) = 440 \Rightarrow 16^x = 32 \Rightarrow x = \dfrac{\log 32}{\log 16} = 1{,}25$

Aufgabe 4:

a) $2^{2x+1} + 4^{x-1} = 2304 \Rightarrow 2^{2x+1} + (2^2)^{x-1} = 2304 \Rightarrow 2^{2x+1} + 2^{2x-2} = 2304$

$\Rightarrow 2^{2x}(2 + 0{,}25) = 2304 \Rightarrow 2^{2x} = 1024 \Rightarrow x = 5$

b) $9^{x-3} - 3^{2x-3} = 3^{2x-7} - 79 \Rightarrow 3^{2x-6} - 3^{2x-3} - 3^{2x-7} = -79$

$\Rightarrow 3^{2x}(3^{-6} - 3^{-3} - 3^{-7}) = -79 \Rightarrow 3^{2x} = 2187 \Rightarrow x = 3{,}5$

c) $2^{4x-5} + 16^{x+0,25} = 4^{2x-0,5} + 98 \Rightarrow 2^{4x-5} + 2^{4x+1} = 2^{4x-1} + 98$

$\Rightarrow 2^{4x}(2^{-5} + 2 - 2^{-1}) = 98 \Rightarrow 2^{4x} = 64 \Rightarrow x = 1{,}5$

d) $81^{x+0,25} + 9^{2x-0,5} = 3^{4x} + 21 \Rightarrow 3^{4x+1} + 3^{4x-1} = 3^{4x} + 21$

$\Rightarrow 3^{4x}(3 + 3^{-1} - 1) = 21 \Rightarrow 3^{4x} = 9 \Rightarrow x = 0{,}5$

Aufgabe 5:

a) $3^{x-1} = 3^{4x-5} \Rightarrow x - 1 = 4x - 5 \Rightarrow -3x = -4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

b) $3^{\frac{4}{x}} = 3^x \Rightarrow \dfrac{4}{x} = x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

c) $5^{\sqrt{x-4}} = 5^{\sqrt{2-x}} \Rightarrow \sqrt{x-4} = \sqrt{2-x} \Rightarrow x - 4 = 2 - x \Rightarrow x = 3$

Nun muss für die Lösung x = 3 eine Probe durchgeführt werden, da beim Quadrierender Wurzeln neue Lösungen entstehen können, die jedoch keine Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung sind.

Setzt man x = 3 in die Wurzelgleichung ein, erkennt man, dass $\sqrt{-1}$ nicht definiert ist. Folglich ist x = 3 keine Lösung der Gleichung. Die Gleichung besitzt somit überhaupt keine Lösung.

d) $2^{2x-3}=32 \Rightarrow 2^{2x-3}=2^5 \Rightarrow 2x-3=5 \Rightarrow x=4$

e) $(2^x)^{x+1}=4 \Rightarrow 2^{x^2+x}=2^2 \Rightarrow x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$

$\Rightarrow x_1=1\ ,\ x_2=-2$

f) $3^{3x+1}=1 \Rightarrow 3^{3x+1}=3^0 \Rightarrow 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

g) $2^{3x-2}=0{,}5 \Rightarrow 2^{3x-2}=2^{-1} \Rightarrow 3x-2=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

h) $5^{3-2x}=\frac{1}{125} \Rightarrow 5^{3-2x}=5^{-3} \Rightarrow 3-2x=-3 \Rightarrow x=3$

Aufgabe 6:

a) $4^x-12\cdot 4^{-x}=1 \Rightarrow 4^x-12\cdot\frac{1}{4^x}=1$ Substitution: $u=4^x$

$u-12\cdot\frac{1}{u}=1 \Rightarrow u^2-12=u \Rightarrow u^2-u-12=0 \Rightarrow u_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}$

$\Rightarrow u_1=4\ ,\ u_2=-3$

Rücksubstitution: $u_1=4=4^x \Rightarrow x=1$

$u_2=-3=4^x$ nicht lösbar

Damit ist x = 1 die einzige Lösung.

b) $3\cdot 16^x+128\cdot 16^{-x}=100 \Rightarrow 3\cdot 16^x+128\cdot\frac{1}{16^x}=100$ Substitution: $u=16^x$

$3\cdot u+128\cdot\frac{1}{u}=100 \Rightarrow 3u^2+128=100u \Rightarrow 3u^2-100u+128=0$

$\Rightarrow u_{1,2}=\frac{100\pm\sqrt{10000-1536}}{6}=\frac{100\pm 92}{6} \Rightarrow u_1=32\ ,\ u_2=\frac{4}{3}$

Rücksubstitution: $u_1=32=16^x \Rightarrow x=1{,}25$

$u_2=\frac{4}{3}=16^x \Rightarrow x=\frac{\log 4/3}{\log 16}\approx 0{,}1038$

c) $3\cdot 2^{2x}-15\cdot 2^x=198$ Substitution: $u=2^x$

$3\cdot u^2-15u-198=0 \Rightarrow u_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225+2376}}{6}=\frac{15\pm 51}{6} \Rightarrow u_1=11,\ u_2=-6$

Rücksubstitution: $u_1=11=2^x \Rightarrow x=\frac{\log 11}{\log 2}\approx 3{,}4594$

$u_2=-6=2^x$ nicht lösbar

Damit ist x =3,4594 die einzige Lösung.

d) $2^{4x}+8=6\cdot 2^{2x}$ Substitution: $u=2^{2x}$

$u^2+8=6u \Rightarrow u^2-6u+8=0 \Rightarrow u_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm 2}{2} \Rightarrow u_1=4\ ,\ u_2=2$

Rücksubstitution: $u_1=4=2^{2x} \Rightarrow x=1$

$u_2=2=2^{2x} \Rightarrow x=0{,}5$

e) $3\cdot 25^x = 8\cdot 5^x - 5 \Rightarrow 3\cdot 5^{2x} = 8\cdot 5^x - 5$ Substitution: $u = 5^x$

$3u^2 = 8u - 5 \Rightarrow 3u^2 - 8u + 5 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6} \Rightarrow u_1 = \frac{5}{3}$, $u_2 = 1$

Rücksubstitution: $u_1 = \frac{5}{3} = 5^x \Rightarrow x = \frac{\log 5/3}{\log 5} \approx 0{,}3174$

$u_2 = 1 = 5^x \Rightarrow x = 0$

f) $16^x + 16 = 10\cdot 4^x \Rightarrow 4^{2x} + 16 = 10\cdot 4^x$ Substitution: $u = 4^x$

$u^2 + 16 = 10u \Rightarrow u^2 - 10u + 16 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow u_1 = 8$, $u_2 = 2$

Rücksubstitution: $u_1 = 8 = 4^x \Rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 4} = 1{,}5$

$u_2 = 2 = 4^x \Rightarrow x = 0{,}5$

g) $2^{x+2} + 2^{1-x} = 6 \Rightarrow 2^x \cdot 2^2 + 2\cdot 2^{-x} = 6 \Rightarrow 4\cdot 2^x + 2\cdot \frac{1}{2^x} = 6$ Substitution: $u = 2^x$

$4u + 2\cdot \frac{1}{u} = 6 \Rightarrow 4u^2 - 6u + 2 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{8} = \frac{6 \pm 2}{8} \Rightarrow u_1 = 1$, $u_2 = 0{,}5$

Rücksubstitution: $u_1 = 1 = 2^x \Rightarrow x = 0$

$u_2 = 0{,}5 = 2^x \Rightarrow x = -1$

h) $3^{2x-1} + 3^{x+2} = 30 \Rightarrow 3^{2x}\cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^2 = 30$ Substitution: $u = 3^x$

$\frac{1}{3}u^2 + 9u - 30 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{2/3} = \frac{-9 \pm 11}{2/3} \Rightarrow u_1 = 3$, $u_2 = -30$

Rücksubstitution: $u_1 = 3 = 3^x \Rightarrow x = 1$

$u_2 = -30 = 3^x$ nicht lösbar

Damit ist x =1 die einzige Lösung.

Aufgabe 7:

a) $2^{x+5} + 2^{x-2} = 129 \Rightarrow 2^x \cdot 2^5 + 2^x \cdot 2^{-2} = 129 \Rightarrow 2^x(2^5 + 2^{-2}) = 129$

$\Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

b) $2^{4x} - 6\cdot 2^{2x} = -8$ Substitution: $u = 2^{2x}$

$u^2 - 6u + 8 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow u_1 = 4$, $u_2 = 2$

Rücksubstitution: $u_1 = 4 = 2^{2x} \Rightarrow x = 1$

$u_2 = 2 = 2^{2x} \Rightarrow x = 0{,}5$

c) $4\cdot 3^{2x+1} = 7\cdot 5^x \Rightarrow \log 4 + (2x+1)\log 3 = \log 7 + x\cdot \log 5$

$\Rightarrow x\cdot(2\log 3 - \log 5) = \log 7 - \log 4 - \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 7 - \log 4 - \log 3}{2\log 3 - \log 5} \approx -0{,}917$

d) $2\cdot 5^{x}+3\cdot 5^{-x}=5 \Rightarrow 2\cdot 5^{x}+3\cdot\frac{1}{5^{x}}=5$ Substitution: $u=5^{x}$

$\Rightarrow 2u+3\cdot\frac{1}{u}=5 \Rightarrow 2u^{2}+3=5u \Rightarrow 2u^{2}-5u+3=0 \Rightarrow u_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm 1}{4}$

$\Rightarrow u_{1}=1{,}5$, $u_{2}=1$

Rücksubstitution: $u_{1}=1{,}5=5^{x} \Rightarrow x=\frac{\log 1{,}5}{\log 5}\approx 0{,}2519$

$u_{2}=1=5^{x} \Rightarrow x=0$

e) $9^{\sqrt{3x-4}}=3^{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \left(3^{2}\right)^{\sqrt{3x-4}}=3^{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow 3^{2\sqrt{3x-4}}=3^{\sqrt{2x+1}}$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x-4}=\sqrt{2x+1} \Rightarrow 4(3x-4)=2x+1 \Rightarrow 10x=17 \Rightarrow x=1{,}7$

Die Probe für x = 1,7 in der Wurzelgleichung liefert eine wahre Aussage, somit ist x = 1,7 tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

f) $3^{4x+1}+81^{x+1}=9^{2x-1} \Rightarrow 3^{4x+1}+3^{4x+4}=3^{4x-2} \Rightarrow 3^{4x}\cdot 3+3^{4x}\cdot 3^{4}-3^{4x}\cdot 3^{-2}=0$

$3^{4x}(3+3^{4}-3^{-2})=0 \Rightarrow 3^{4x}=0$

Diese Gleichung liefert keine Lösung, da log(0) nicht definiert ist.