Aufgaben zu Logarithmen

Definition Logarithmus: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Logarithmengesetze

1. Logarithmengesetz: $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

2. Logarithmengesetz: $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$

3. Logarithmengesetz: $\log_b(x^m) = m \cdot \log_b(x)$

Weitere wichtige Regeln: $\log_b(x)$ ist nur definiert für $x > 0$!

$\log_b 1 = 0$ für jede Basis $b > 0$

Kurzschreibweise: $\log_{10} x = \log x$

Taschenrechnerformel: $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$

Für Logarithmengleichungen: $b^{\log_b x} = x$

Aufgabe 1:
Berechne im Kopf:

a) $\log_2 8$ b) $\log_3 \sqrt{3}$ c) $\log_4 \frac{1}{16}$ d) $\log_5(-25)$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ f) $\log 0{,}01$

g) $\log \sqrt[5]{10^3}$ h) $\log_4 \sqrt[6]{2}$ i) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2}$ j) $\log(0)$

Aufgabe 2:
Berechne mit dem Taschenrechner auf vier Nachkommastellen:

a) $\log_3 17$ b) $\log_{0,25} \sqrt{3}$ c) $\log_6 100$ d) $\log_2 1000000$

Aufgabe 3:
Berechne für $a > 0$:

a) $\log_a a$ b) $\log_a a^n$ c) $\log_a \sqrt{a^3}$ d) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ e) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$ f) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^5}$

Aufgabe 4:
Bestimme x:

a) $\log_2 x = 128$ b) $\log_5 0{,}2 = x$ c) $\log_x \sqrt{3} = 0{,}25$ d) $\log_{27} x = \frac{2}{3}$

e) $\log 10^8 = x$ f) $\log(\log x) = 1$ g) $\log_4(2x) = 4$ h) $\log_2(\log_2 x) = 3$

i) $\log_x 2 = 0{,}5$ j) $\log_x 4 = -0{,}5$ k) $\log_x(a^n) = 2n$

Aufgabe 5:
Zerlege die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze (d.h. Anwendung der Logarithmusgesetze von links nach rechts):

a) $\log_a \frac{u \cdot v}{w}$ b) $\log_a \frac{a}{b \cdot c}$ c) $\log_a (u^3 \cdot v^4)$ d) $\log_a \left(\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[3]{b}\right)$

e) $\log_a \frac{b^2 \cdot c \cdot \sqrt{d}}{e \cdot f^3}$ f) $\log_a \left(\frac{x^2 \cdot 2y}{\sqrt{z}}\right)^{\frac{1}{3}}$ g) $\log_a \sqrt{\frac{a}{b}}$ h) $\log_a \sqrt{\frac{5b^3c^5}{18de^3}}$

i) $\log_a \frac{3b+2c}{b-2d}$ j) $\log_a \left[(x+y)^3 \cdot (x-y)^5\right]$ k) $\log_a \frac{x(x-y)}{(3x+2y)^2}$

l) $\log \frac{4ab^3}{2x+y}$ m) $\log\left[(x+y)^2 \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{b}\right]$ n) $\log \frac{3\sqrt{x} \cdot \frac{5}{b}}{6yz}$

Aufgabe 6
Fasse die Ausdrücke zu einem einigen Logarithmus zusammen (d.h. Anwendung der Logarithmusgesetze von rechts nach links):

a) $\log_3 5 - \log_3 15 + \log_3 \frac{1}{9}$ b) $2 \cdot \log_a b - \log_a c$

c) $2 \cdot \log_b (ab) - \log_b \sqrt{b^3} + \log_b \frac{1}{a^2}$ d) $\log_b (b^2 - 9) - \log_b (b+3) - \log_b (b-3) + \log_b \sqrt{b}$

e) $\log_3 (x+5) - \log_3 (5x+25) + 2 \cdot \log_3 (\sqrt{5x})$ f) $(\log_2 u^2 - \log_2 u + \log_2 \sqrt{u}) : \log_2 u^3$

Aufgabe 7:
Es ist $\log(a+b) = 2$.

Vereinfache: $\log(a-b) + \log\sqrt{a+b} - \log\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$

Aufgabe 8:
Berechne mit Hilfe des Näherungswertes $\log_2 9 \approx 3{,}170$ die folgenden Logarithmen näherungsweise (ohne Nutzung der Log-Taste auf dem Taschenrechner).

a) $\log_2 \frac{1}{9}$ b) $\log_2 18$ c) $\log_2 3$ d) $\log_2 2{,}25$

Aufgabe 9:
Bestimme die Lösungsmengen der folgenden logarithmischen Gleichungen:

a) $\log_4 (3x+1) = 3$ b) $\log(12x-8) = 2$ c) $\log_2 \frac{2x-6}{x-3} = 4$

d) $\log_2 (x^2 - 1) + 5 = 8$ e) $\log_3 (2x-5) - \log_3 (x-1) = 3$

f) $\log_3 (x+3) + \log_3 6 = 2 + \log_3 (x-4)$ g) $(\log x)^2 + \log(x) = 6$

Musterlösungen

Aufgabe 1:

a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_3 \sqrt{3} = 0{,}5$ c) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ d) $\log_5(-25)$ existiert nicht

e) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ f) $\log 0{,}01 = -2$ g) $\log \sqrt[5]{10^3} = \frac{3}{5}$

h) $\log_4 \sqrt[6]{2} = x \Rightarrow 4^x = 2^{\frac{1}{6}} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{6}} \Rightarrow 2x = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{12}$

i) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2} = x \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ j) $\log(0)$ existiert nicht

Aufgabe 2:

a) $\log_3 17 = 2{,}5789$ b) $\log_{0,25} \sqrt{3} = -0{,}3962$ c) $\log_6 100 = 2{,}5702$

d) $\log_2 1000000 = 19{,}9316$ (Logarithmen wachsen nur sehr langsam !)

Aufgabe 3:

a) $\log_a a = 1$ b) $\log_a a^n = n$ c) $\log_a \sqrt{a^3} = \frac{3}{2}$

d) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = -\frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = -2$ f) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^5} = -\frac{5}{3}$

Aufgabe 4:

a) $\log_2 x = 128 \Rightarrow x = 2^{128}$ b) $\log_5 0{,}2 = x \Rightarrow 5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -1$

c) $\log_x \sqrt{3} = 0{,}25 \Rightarrow x^{0,25} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt[4]{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 9$ d) $\log_{27} x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 27^{\frac{2}{3}} = 9$

e) $\log 10^8 = x \Rightarrow x = 8$ f) $\log(\log x) = 1 \Rightarrow \log(x) = 10 \Rightarrow x = 10^{10}$

g) $\log_4(2x) = 4 \Rightarrow 2x = 4^4 \Rightarrow x = 128$ h) $\log_2(\log_2 x) = 3 \Rightarrow \log_2(x) = 8 \Rightarrow x = 2^8$

i) $\log_x 2 = 0{,}5 \Rightarrow x^{0,5} = 2 \Rightarrow x = 4$ j) $\log_x 4 = -0{,}5 \Rightarrow x^{-0,5} = 4 \Rightarrow x^{0,5} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$

k) $\log_x(a^n) = 2n \Rightarrow x^{2n} = a^n \Rightarrow x = \sqrt[2n]{a^n} = a^{\frac{n}{2n}} = \sqrt{a}$

Aufgabe 5:

a) $\log_a \frac{u \cdot v}{w} = \log_a u + \log_a v - \log_a w$

b) $\log_a \frac{a}{b \cdot c} = \log_a a - (\log_a b + \log_a c) = 1 - \log_a b - \log_a c$

c) $\log_a(u^3 \cdot v^4) = \log_a u^3 + \log_a v^4 = 3 \cdot \log_a u + 4 \cdot \log_a v$

d) $\log_a\left(\sqrt[5]{a^4}\cdot\sqrt[3]{b}\right)=\log_a a^{\frac{4}{5}}+\log_a b^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\log_a b$

e) $\log_a \frac{b^2\cdot c\cdot\sqrt{d}}{e\cdot f^3}=\log_a b^2+\log_a c+\log_a d^{\frac{1}{2}}-(\log_a e+\log_a f^3)$

$$=2\log_a b+\log_a c+\frac{1}{2}\log_a d-\log_a e-3\log_a f$$

f) $\log_a\left(\frac{x^2\cdot 2y}{\sqrt{z}}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\left[\log_a x^2+\log_a 2+\log_a y-\log_a z^{\frac{1}{2}}\right]$

$$=\frac{2}{3}\log_a x+\frac{1}{3}\log_a 2+\frac{1}{3}\log_a y-\frac{1}{6}\log_a z$$

g) $\log_a\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{a}{b}=\frac{1}{2}(\log_a a-\log_a b)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_a b$

h) $\log_a\sqrt{\frac{5b^3c^5}{18de^3}}=\frac{1}{2}(\log_a 5+\log_a b^3+\log_a c^5-\log_a 18-\log_a d-\log_a e^3)$

$$=\frac{1}{2}\log_a 5+\frac{3}{2}\log_a b+\frac{5}{2}\log_a c-\frac{1}{2}\log_a 18-\frac{1}{2}\log_a d-\frac{3}{2}\log_a e$$

i) $\log_a\frac{3b+2c}{b-2d}=\log_a(3b+2c)-\log_a(b-2d)$

j) $\log_a\left[(x+y)^3\cdot(x-y)^5\right]=3\log_a(x+y)+5\log_a(x-y)$

k) $\log_a\frac{x(x-y)}{(3x+2y)^2}=\log_a x+\log_a(x-y)-2\log_a(3x+2y)$

l) $\log\frac{4ab^3}{2x+y}=\log 4+\log a+3\log b-\log(2x+y)$

m) $\log\left[(x+y)^2\cdot a^2\cdot\sqrt[3]{b}\right]=2\log(x+y)+2\log a+\frac{1}{3}\log b$

n) $\log\frac{3\sqrt{x}\cdot\frac{5}{b}}{6yz}=\log 3+\frac{1}{2}\log x+\log 5-\log b-\log 6-\log y-\log z$

Aufgabe 6

a) $\log_3 5-\log_3 15+\log_3\frac{1}{9}=\log_3\frac{5\cdot\frac{1}{9}}{15}=\log_3\frac{1}{27}=-3$

b) $2\cdot\log_a b-\log_a c=\log_a b^2-\log_a c=\log_a\frac{b^2}{c}$

c) $2\cdot\log_b(ab)-\log_b\sqrt{b^3}+\log_b\frac{1}{a^2}=\log_b(ab)^2-\log_b b^{\frac{3}{2}}+\log_b a^{-2}$

$$=\log_b\frac{(ab)^2\cdot a^{-2}}{b^{1,5}}=\log_b\frac{a^2b^2\cdot a^{-2}}{b^{1,5}}\log_b b^{0,5}=0,5$$

d) $\log_b(b^2-9)-\log_b(b+3)-\log_b(b-3)+\log_b\sqrt{b}=\log_b\dfrac{(b^2-9)\cdot\sqrt{b}}{(b+3)(b-3)}=\log_b\sqrt{b}=0{,}5$

e) $\log_3(x+5)-\log_3(5x+25)+2\cdot\log_3(\sqrt{5x})=\log_3\dfrac{(x+5)\cdot\left(\sqrt{5x}\right)^2}{(5x+25)}=\log_3\dfrac{(x+5)\cdot 5x}{5(x+5)}=\log_3 x$

f) $(\log_2 u^2-\log_2 u+\log_2\sqrt{u}):\log_2 u^3=(\log_2\dfrac{u^2\cdot\sqrt{u}}{u}):\log_2 u^3=\dfrac{\log_2 u^{1{,}5}}{\log_2 u^3}=\dfrac{1{,}5\log_2 u}{3\log_2 u}=0{,}5$

Aufgabe 7:

$\log(a-b)+\log\sqrt{a+b}-\log\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\log((a-b)\cdot\sqrt{a+b})-\log\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}$

$=\log\dfrac{(a-b)\cdot(a+b)^{0{,}5}}{\dfrac{a-b}{a+b}}=\log(a+b)^{1{,}5}=1{,}5\cdot\log(a+b)=1{,}5\cdot 2=3$

Aufgabe 8:

a) $\log_2\dfrac{1}{9}=\log_2 9^{-1}=-1\cdot\log_2 9\approx-3{,}170$

b) $\log_2 18=\log_2(2\cdot 9)=\log_2 2+\log_2 9\approx 1+3{,}170=4{,}170$

c) $\log_2 3=\log_2\sqrt{9}=\dfrac{1}{2}\cdot\log_2 9\approx 1{,}585$

d) $\log_2 2{,}25=\log_2\dfrac{9}{4}=\log_2 9-\log_2 4\approx 3{,}170-2=1{,}170$

Aufgabe 9:

a) $\log_4(3x+1)=3\Rightarrow 4^{\log_4(3x+1)}=4^3\Rightarrow 3x+1=64\Rightarrow x=21$
Probe ergibt L = {21}

b) $\log(12x-8)=2\Rightarrow 10^{\log(12x-8)}=10^2\Rightarrow 12x-8=100\Rightarrow x=9$
Probe ergibt L = {9}

c) $\log_2\dfrac{2x-6}{x-3}=4\Rightarrow 2^{\log_2\frac{2x-6}{x-3}}=2^4\Rightarrow\dfrac{2x-6}{x-3}=16\Rightarrow 2x-6=16x-48\Rightarrow x=3$
Da aber x = 3 nicht in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden darf (Division durch 0 !)
Besitzt diese Gleichung keine Lösung, also L = { }.

d) $\log_2(x^2-1)+5=8\Rightarrow 2^{\log_2(x^2-1)}=2^3\Rightarrow x^2-1=8\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$
Probe ergibt L = {-3; 3}

e) $\log_3(2x-5)-\log_3(x-1)=3\Rightarrow\log_3\dfrac{2x-5}{x-1}=3\Rightarrow 3^{\log_3\frac{2x-5}{x-1}}=3^3\Rightarrow\dfrac{2x-5}{x-1}=27$

$2x-5=27(x-1)\Rightarrow-25x=-22\Rightarrow x=\dfrac{22}{25}$

Die Lösung von x darf allerdings nicht in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, da z.B. $\log_3(2\cdot\dfrac{22}{25}-5)$ nicht definiert ist. Es gilt L = { }.

f) $\log_3(x+3)+\log_3 6 = 2+\log_3(x-4) \Rightarrow \log_3 \frac{(x+3)\cdot 6}{x-4} = 2 \Rightarrow \frac{6(x+3)}{x-4} = 3^2$

$\Rightarrow 6x+18 = 9x-36 \Rightarrow x = 18$; Probe ergibt L = {18}

g) $(\log x)^2 + \log(x) = 6$ Substitution: $u = \log x$

$\Rightarrow u^2 + u = 6 \Rightarrow u^2 + u - 6 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow u_1 = 2,\ u_2 = -3$

Rücksubstitution: $2 = \log x \Rightarrow 10^2 = 10^{\log x} \Rightarrow x = 100$

$-3 = \log x \Rightarrow 10^{-3} = 10^{\log x} \Rightarrow x = \frac{1}{1000}$

Probe ergibt L = $\{\frac{1}{1000};100\}$