ASK

Hochschule Konstanz HTWG
Ausländerstudienkolleg (ASK)
www.ask.htwg-konstanz.de

INFORMATIONEN ZUM AUFNAHMETEST MATHEMATIK

Inhalt

Vorbemerkung

Sehr geehrte Bewerberinnen und Bewerber,

wer studieren möchte, muss über gute Mathematikkenntnisse verfügen. Wir bereiten Sie im Studienkolleg gezielt auf das Studium vor, fangen bei der Mathematik aber nicht mit der Grundstufe an. Sie benötigen Vorkenntnisse.

Wir haben dieses Dokument erstellt, damit Sie überprüfen können, ob Ihre Vorkenntnisse für den Besuch des Studienkollegs ausreichen. Wenn Sie dieses Dokument durcharbeiten, werden Sie feststellen, welche Themen Sie schon beherrschen und welche nicht. Das Ziel ist die Diagnose, nicht die Vermittlung. Das Dokument ersetzt also nicht das Lehrbuch oder den Unterricht.

- In den **Anforderungen** (Kapitel 1) finden Sie eine Übersicht über die mathematischen Kenntnisse, die im Studienkolleg vorausgesetzt werden. Schauen Sie sich die Übersicht an und entscheiden Sie, welche Themen Sie noch wiederholen müssen.
- Bei den **Aufgaben** zur Vorbereitung auf den Aufnahmetest (Kapitel 2) finden Sie jeweils drei Aufgaben zu einem mathematischen Problem. Die Aufgaben sind unterschiedlich schwierig, Aufgabe c ist am schwierigsten.
- Die **Lösungen** der Stufe 1 (Kapitel 3) enthalten die Lösung, nützliche Formeln und Links zu Seiten im Internet.
- Die **ausführlichen Lösungen** (Kapitel 4) sind Lösungen der Stufe 2, sie zeigen also den Lösungsweg.
- Das Dokument enthält zwei **Musterprüfungen** (Kapitel 5). Sie verdeutlichen, wie der Aufnahmetest gestaltet ist.
- Die **Formelsammlung** (Kapitel 6) können Sie während der Prüfung benutzen.

Wir wünschen Ihnen eine gute Prüfungsvorbereitung und freuen uns auf Sie!

Ihr Team vom Studienkolleg der Fachhochschulen in Baden-Württemberg

Materialien zur Wiederholung und Vorbereitung

Bücher in der Buchhandlung:

1. Schäfer, Wolfgang; Georgi, Kurt; Trippler, Gisela: Mathematik-Vorkurs: Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger; 6. Aufl.; Stuttgart ; Leipzig ; Wiesbaden : Teubner, 2006; 444 S.; ISBN978-3-8351-0036-72.
2. Knorrenschild, Michael: Vorkurs Mathematik: ein Übungsbuch für Fachhochschulen von Michael Knorrenschild. München: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2004; 174 S. ISBN 3-446-22818-7.

Quellen im Internet

1. http://www.mathe-physik-aufgaben.de/mathematik.html
2. http://www.strobl-f.de/uebmath.html (Franz Strobl hat das Wichtigste für das Fach Mathematik am Gymnasium aufbereitet und mit Übungsaufgaben versehen.)
3. http://www.rhoen-gymnasium.de/index.php?option=com_docman&task=cat_view&gid=81&Itemid=113 (Hier bietet das Rhön-Gymnasium in Bad Neustadt für die Jahrgangsstufen 5-10 Wissen und Übungen zum Fach Mathematik an)
4. http://www.luchsinger-mathematics.ch/kurse/WMS1_Teil2.pdf (Das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen)
5. http://schuelerlexikon.de/SID/c4a508a40d6d66979a286ec1fb436306/index.php?id=11 (Duden – Schülerlexikon)

Bücher in der HTWG - Bibliothek:

1. Asser, Günter; Wisliceny, Jürgen: Grundbegriffe der Mathematik.
2. Engesser, Hermann: Der kleine Duden "Mathematik". [Lexikon mathematischer Begriffe und Formeln]
3. Kusch, Lothar; Rosenthal, Hans-Joachim: Mathematik für Schule und Beruf.

1 Anforderungen

1.1 Mit Zahlen rechnen

Zentrale Begriffe: Mengen, Element, Teilmengen, Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Differenzmenge, Zahlenmengen, Intervalle.

Rechenart	Term	Der Term heißt
Addition	a + b	Summe
Subtraktion	a – b	Differenz
Multiplikation	a·b = ab	Produkt
Division	a : b = a/b, oder $\frac{a}{b}$	Quotient oder Bruch
Radizieren	$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel von a
Potenzieren	a^n	n-te Potenz zur Basis a
Logarithmieren	$\log_a b$	Logarithmus von b zur Basis a

Addition und Subtraktion von Summen; Auflösen und Setzen von Klammern
a + b – c = a + b + (- c) Das nennt man auch Summe.
(a + b – c) – (d – e) = a + b – c – d + e

Multiplizieren von Summen
(a + b – c)·(d – e) = ad –ae +bd – be – cd + ce

Ausklammern eines gemeinsamen Faktors
da + db – dc = d(a + b – c)

Kehrzahl (Reziproke): Zu einer Zahl a ≠ 0 heißt die Kehrzahl 1/a

Rechnen mit Beträgen

Absolutbetrag $|a|$ einer Zahl a ist gleich a, wenn $a \geq 0$ und gleich (–a), wenn a < 0.

Bruchrechnen

Addieren	Bei gleichen Nennern $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ Bei verschiedenen Nennern $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$; $a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$
Subtrahieren	Bei gleichen Nennern $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ Bei verschiedenen Nennern $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}$; $a-\frac{b}{c}=\frac{a}{1}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$
Multiplizieren	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$; $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$
Dividieren	$\frac{a}{b}:\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$; $a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$
Erweitern	$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ Der Zähler und der Nenner werden mit der selben Zahl multipliziert.
Kürzen	$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ Der Zähler und der Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.
Mehrfachbrüche	z.B. $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}+\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}}}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}+\frac{\mathrm{c}}{\frac{\mathrm{df+e}}{\mathrm{f}}}}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}+\frac{\mathrm{cf}}{\mathrm{df+e}}}=\frac{\mathrm{a}}{\frac{\mathrm{b(df+e)+cf}}{\mathrm{df+e}}}=\frac{\mathrm{a(df+e)}}{\mathrm{bdf+be+cf}}$

Binomische Formeln anwenden

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Rechnen mit Potenzen

	Bei gleicher Basis	Bei gleichem Exponent
Multiplizieren	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
Dividieren	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0.$ $Wenn\, n = m, dann\, a^0 = 1$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n ; b \neq 0.$
Potenzen von Potenzen	$(a^n)^m = a^{nm}$	

Rechnen mit Wurzeln

	Bei gleichem Wurzelexponent
Multiplizieren	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b};\ a, b \geq 0$
Dividieren	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b};\ \ a \geq 0, b > 0$

Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Zum Rechnen wandelt man Wurzeln in Potenzen um

Rechnen mit Logarithmen

Anwenden der Logarithmensätze

$$log_a(b \cdot c) = log_a b + \ log_a c; \quad a > 0, b > 0, c > 0, a \ \neq 1;$$

$$log_a(b{:}\, c) = log_a b - \ log_a c;$$

$$log_a(b)^n = n \cdot log_a b$$

Umrechnung von Logarithmen mit unterschiedlichen Basen **u** und **w** :

$$log_u a = \frac{log_w a}{log_w u}$$

1.2 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Zentrale Begriffe: Pol, StützpunktÄquivalenzumformungen von Gleichungen

Man darf einen Term auf **beiden Seiten** der Gleichung addieren oder subtrahieren (alle Äquivalenzumformungen **müssen auf beiden Seiten** ausgeführt werden).

Man darf **beide Seiten** der Gleichung mit einem Term multiplizieren oder durch einen Term dividieren. Dieser Term darf nicht Null sein!

Man darf Gleichungen addieren und subtrahieren.

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Man darf einen Term auf **beiden Seiten** der Ungleichung addieren oder subtrahieren (alle Äquivalenzumformungen **müssen auf beiden Seiten** ausgeführt werden).

Man darf **beide Seiten** der Ungleichung mit einer positiven Zahl multiplizieren oder durch eine positive Zahl dividieren. Wenn diese Zahl negativ ist, dreht man das Ungleichheitszeichen um ($> \leftrightarrow <$). Diese Zahl darf nicht die Null sein.

Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen

Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei und drei Unbekannten

Anwenden von Lösungsverfahren (z.B. Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Substitutionsverfahren, Gauß Verfahren)

Systeme von Ungleichungen mit zwei Variablen

Graphische Methode anwenden

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Man beachtet die Bedingungen: $|x| = \begin{cases} x, wenn\ x > 0 \\ 0, wenn\ x = 0 \\ -x, wenn\ x < 0 \end{cases}$

Lösen Quadratischer Gleichungen

Anwenden der Lösungsformel für Quadratische Gleichungen

(für die allgemeine Form $ax^2+bx+c=0$; $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a}$;

oder Normalform $x^2+px+q=0$; $x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt[2]{p^2-4q}}{2}$,

oder durch Produktzerlegung $ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2))=0$

Der Ausdruck $D=b^2-4ac$ heißt Diskriminante.

Lösen biquadratischer Gleichungen

$ax^4+bx^2+c=0$

Lösen von Gleichungen höheren Grades

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0;$$

$P_n(x)$ heißt Polynom n-ten Grades und kann als Produkt so genannter Linearfaktoren $(x-x_i)$ geschrieben werden: $P_n(x)=a_n(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$, wobei x_i Nullstellen des Polynoms $P_n(x)$ sind. Man löst die Gleichung $P_n(x)=0$ durch Probieren und anschließender Polynomdivision (= Partialdivision).

Lösen von Bruchgleichungen (Unbekannte auch im Nenner)

Definitionsbereich ermitteln und dann mit dem Hauptnenner multiplizieren.

Lösen von Wurzelgleichungen durch Quadrieren

Überprüfen der Lösung durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung (Probe), weil Quadrieren keine äquivalente Umformung ist.

Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen

Die Eigenschaften der Potenz und des Logarithmus beachten.

Lösen von Trigonometrischen (goniometrischen) Gleichungen

Man wendet die trigonometrische Formeln und den Einheitskreis an.

1.3 Elementare Funktionen

Anwenden der Kenntnisse über reelle Funktionen.

Zentrale Begriffe: Graph oder Schaubild, Abszisse, Ordinate, Quadrant, Wertemenge, Schnitt- und Berührungspunkte mit den Koordinatenachsen, Nullstellen, Periodizität und Symmetrie, Definitionsbereich

Lineare Funktion

$f(x)=m\cdot x+n$, wobei m Steigung heißt und n – Verschiebung

Quadratische Funktion, Parabel, Scheitelpunkt

$f(x)=ax^2+bx+c$

Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

$f(x)=ax^n+b$

Wurzelfunktionen

$f(x)=a\sqrt[n]{x^m}+b=ax^{\frac{m}{n}}+b$

Exponentialfunktionen

$f(x)=a^x+b;$
Spezialfall $f(x)=e^x$, wobei e die Euler'sche Zahl ist.

Logarithmusfunktionen

$f(x)=\log_a(x);\ a>0,\ a\neq 1,\ x>0$
Sonderfälle: $a=10,\ \ f(x)=\lg(x)$ - Zehnerlogarithmus
$a=e,\ \ f(x)=\ln(x)$ - natürlicher Logarithmus
$a=2,\ \ f(x)=\mathrm{lb}(x)$ – binarer **Logarithmus**

Trigonometrische Funktionen

$f(x)=\sin x;\ f(x)=\cos x;\ f(x)=\tan x;f(x)=\cot x$
Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cot x}$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

Umkehrfunktionen

Bestimmung der Umkehrfunktion
z.B. für $f(x)=x^n$ ist die Umkehrfunktion $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $x \in R_0^+$.
für $f(x)=e^x$ ist die Umkehrfunktion $f(x)=\ln(x)$, $x \in R^+$.
für $f(x)=\sin x$ ist die Umkehrfunktion $f(x)=\arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$
u.s.w.

2 Aufgaben

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Formelsammlung, aber ohne einen Taschenrechner. Die dritte Aufgabe "c" ist am schwierigsten.

Wenn es schwierig wird, wenden Sie sich an unsere zweistufige Hilfe: Bei der Stufe 1 bekommen Sie nur Hinweis auf die nützlichen Formeln und Lösungswege (Kapitel 3). Bei der Stufe 2 zeigen wir Ihnen die ausführliche Lösung (Kapitel 4).
Aufgabe: Berechnen Sie alle reellen Zahlen x.

2.1 Quadratische Gleichungen

1a. $x^2 + 1{,}5x - 1 = 0;$

1b. $3x^2 + 5x + 4 = 0;$

1c. $-x^2 + 4x - 4 = 0;$

2.2 Gleichungen höheren Grades

2a. $-2x^4 + 7x^2 + 4 = 0;$

2b. $-3x^3 + 4x^2 + x + 6 = 0;$

2c. $2x^5 - 5x^4 + 5x^2 - 2x = 0;$

2.3 Bruchgleichungen

3a. $\frac{x}{2x-1} - \frac{3}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1}$

3b. $1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}} = 0$

3c. $1 + \frac{x+1}{x-1} + \frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}} = 0$

2.4 Wurzelgleichungen

4a. $\sqrt{x^2 - 3x} = 2$

4b. $\sqrt{x^2 - 6} - \sqrt{2x - 3} = 0$

4c. $\sqrt{x - 6} - \sqrt{2x - 3} = 3$

2.5 Exponentialgleichungen

5a. $4^{x+2} - 32 = 0$

5b. $9^{x+1} + 3^{x+1} - 12 = 0$

5c. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

2.6 Logarithmusgleichungen

6a. $2log_3(x-4) = 6$

6b. $log_2(9^{x-1}+7) = 2 + log_2(3^{x-1}+1)$

6c. $log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (log_3 x)^2 = 1$

2.7 Trigonometrische Gleichungen

7a. $6\cos x = -3$

7b. $4\sin x - 2\cos 2x = 1$

7c. $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 - \sin 2x$

2.8 Ungleichungen

8a. $2x - 5 \leq 9$

8b. $x^2 - 3x > 4$

8c. $\frac{x}{x+6} < \frac{1}{x}$

2.9 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

9a. $2|x| - 3 = 4x$

9b. $x^2 - |x-4| = 16$

9c. $|2x-5| < 3$

2.10 Lineare Gleichungssysteme

10a.
$$\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -2 \\ x + y + 1 &= z \end{aligned}$$

10b.
$$\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -2 \\ 2x + y + z &= -1 \end{aligned}$$

10c.
$$\begin{aligned} 4x + y - z &= 1 \\ -x - y + 3z &= 5 \\ 2x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

3 Lösungen

3.1 Quadratische Gleichungen

Man wendet die Lösungsformel an und beachtet den Diskriminantenwert.

1a. $x_1 = -2;\ \ x_2 = \frac{1}{2};\ Lösungsmenge\ L = \{-2;\ \frac{1}{2}\}$.

1b. Keine Lösung; Lösungsmenge L = { }

1c. $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; Lösungsmenge L = {2}

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.1, Seite 15. Hilfe im Internet: http://www.mathematik.de/mde/fragenantworten/erstehilfe/quadratischegleichungen/quadratischegleichungen.html

3.2 Gleichungen höheren Grades

Man sucht eine passende Anfangslösung und reduziert den Grad des Polynoms durch die Polynomdivision. Bei den biquadratischen Gleichungen wendet man nach der Substitution $x^2 = u$ die Lösungsformel für quadratische Gleichungen an.

2a. $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; x_3 und x_4 sind keine reellen Zahlen.
Lösungsmenge L = {-2;2}

2b. $x_1 = 2$; x_2 und x_3 sind keine reellen Zahlen.
Lösungsmenge L = {2}

2c. $x_1 = 0;\ x_2 = 1; x_3 = -1;\ x_4 = 2\ x_5 = \frac{1}{2};$

Lösungsmenge $L = \{-1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2\}$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.2, Seite 15. Hilfe im Internet:

1. http://did.mat.uni-bayreuth.de/~wn/ss_01/mueller/node9.html - Biquadratische Gleichungen
2. http://www.strobl-f.de/grund102.pdf - Gleichungen höheren Grades
3. http://www.oberprima.com/index.php/polynomdivision/nachhilfe - Polynomdivision Video
4. http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/sfs0001.htm - Polynomdivision

3.3 Bruchgleichungen

Man sucht den Definitionsbereich (Nenner darf nicht 0 sein!) und berechnet den Hauptnenner. Danach multipliziert man beide Gleichungsseiten mit dem Hauptnenner und löst die Ergebnisgleichung.

3a. $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{5}{2};\ Lösungsmenge\ L = \{0; \frac{5}{2}\}$

3b. $x_1 = \frac{2}{3};\ Lösungsmenge\ L = \{\frac{2}{3}\}$

3c. Keine Lösung. L = ∅ .

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.3, Seite 16 und Kapitel 4.1,Seite 15.
Hilfe im Internet:
http://www.mathe1.de/mathematikbuch/zusammenfassung_bruchgleichungen_149.htm

3.4 Wurzelgleichungen

Löst man durch Quadrieren – nichtäquivalente Umformung! – deshalb Probe machen.

4a. $x_1 = -1$; $x_2 = 4$; Lösungsmenge L = {-1;4}
4b. $x_1 = 3$; Lösungsmenge L = {3}
4c. Keine Lösung. L = ∅.

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.4, Seite 18. Hilfe im Internet:
http://www.arndt-bruenner.de/mathe/pdf/wurzelgleichungen1.pdf

3.5 Exponentialgleichungen

Löst man durch Logarithmieren und, falls notwendig, durch Substitution.

5a. $x_1 = \frac{1}{2}$; Lösungsmenge L = $\{\frac{1}{2}\}$
5b. $x_1 = 0$; Lösungsmenge L = {0}
5c. $x_1 = \frac{3}{2}$; Lösungsmenge L = $\{\frac{3}{2}\}$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.5, Seite 19. Hilfe im Internet:
1. http://www.johnny.ch/ot/na_exp.htm
2. http://www.klassenarbeiten.net/klassenarbeiten/uebungen/klasse10/mathematik/index.shtml

3.6 Logarithmusgleichungen

Man verwendet die Eigenschaften des Logarithmus.

6a. $x_1 = 31$; Lösungsmenge L = {31}
6b. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; Lösungsmenge L = {1;2}
6c. $x_1 = 1$; $x_2 = 1/9$; $x_3 = 3$. Lösungsmenge L = {1/9; 1; 3}.

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.6, Seite 20. Hilfe im Internet:
http://www.klassenarbeiten.net/klassenarbeiten/uebungen/klasse10/mathematik/index.shtml

3.7 Trigonometrische Gleichungen

Man verwendet die wichtigsten Trigonometrischen Formeln und einen Einheitskreis; siehe Anforderungsverzeichnis/Trigonometrische Funktionen.

7a. $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \; x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi; \; k, n \in Z;$
7b. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \; x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi; k, n \in Z;$
7c. $x_1 = \frac{(4k+1)\pi}{4}; \; x_2 = n\pi; k, n \in Z;$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.7, Seite 22. Hilfe im Internet:
http://www.klassenarbeiten.de/klassenarbeiten/klasse10/mathematik/klassenarbeit80_trigonometrie.htm

3.8 Ungleichungen

Eine recht einfache Methode: Man betrachtet die Ungleichung wie eine Gleichung, sucht entsprechende Lösungen und Pole (Stützpunkte) und untersucht danach Anfangsungleichungen in den Intervallen zwischen den Stützpunkten.

8a. $x \le 7$; Lösungsmenge L =]-∞;7]
8b. $\{-\infty < x < -1\} \cup \{4 < x < \infty\}$; Lösungsmenge L = $]-\infty, -1[\cup]4, \infty[$;
8c. Lösungsmenge L =] -6;-2[∪]0;3[;

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.8, Seite 24.

Hilfe im Internet: Eine andere Methode:
1. http://www.ingmedia.fh-aachen.de/mathe_vk/rec_ungleichung/seite_02.html
2. http://www.luchsinger-mathematics.ch/kurse/WMS1_Teil2.pdf
3. www.jesgefrees.de/mathematik/Losungsbausteine_I/Losen_von_**Ungleichungen**.doc

3.9 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Vergessen Sie bitte nicht, dass $|x| = \begin{bmatrix} x, wenn\ x > 0 \\ 0, wenn\ x = 0 \\ -x, wenn\ x < 0 \end{bmatrix}$

9a. $x_1 = -\frac{1}{2}$; Lösungsmenge L = $\{-\frac{1}{2}\}$
9b. $x_1 = -5$; $x_2 = 4$; Lösungsmenge L = {-5;4}
9c. $1 < x_1 < 4$; Lösungsmenge L =]1;4[

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.9, Seite 26. Hilfe im Internet: http://www.mathe-aufgaben.de/mathecd/12_Algebra/12611%20Betrag%20GUG%201%20STLOD.pdf

3.10 Lineare Gleichungssysteme

Wenden Sie bitte die Gauß'sche oder Cramer'sche Methode an.

10a. $x = -\frac{6}{7};\ y = \frac{2}{7}; z = \frac{3}{7};$

10b. Unendlich viele Lösungen: $x = \frac{-3(1+t)}{5}; y = \frac{1+t}{5}; z = t,$

wobei Parameter $t \in R$

10c. Keine Lösung

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.10, Seite 27. Hilfe im Internet: http://www.oberprima.com/index.php/lgs-loesung-gleichungssystem-nach-gauss/nachhilfe - Gaußverfahren Video

4 Ausführliche Lösungen

4.1 Quadratische Gleichungen

Man wendet die Lösungsformel

$ax^2 + bx + c = 0;\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$

an und beachtet den Diskriminantenwert $D = b^2 - 4ac$.

1a. D = 2,25 + 4 = 6,25 > 0

→ Zwei verschiedene Lösungen: $x_1 = -2;\ x_2 = \frac{1}{2};$

1b. D = 25 – 48 = -23 < 0

→ Keine Lösung;

1c. D = 16 – 16 = 0

→beide Lösungen sind gleich: $x_1 = x_2 = 2$;

4.2 Gleichungen höheren Grades

Man sucht eine passende Anfangslösung und reduziert den Grad des Polynoms durch die Polynomdivision. Bei den Biquadratischen Gleichungen wendet man nach der Substitution $x^2 = u$ die Lösungsformel für Quadratische Gleichungen an.

2a.

$-2x^4 + 7x^2 + 4 = 0;\ x \in \mathrm{P}$

Nach der Substitution $x^2 = u$ erhält man die Gleichung

$-2u^2 + 7u + 4 = 0$

und löst diese, wie in Aufgabe 1 beschrieben ist:

$u_1 = 4;\ u_2 = -\frac{1}{2};$ → $x^2 = u_1 = 4;$ → $x_1 = 2;\ x_2 = -2.$

Wenn $x^2 = u_2 = -\frac{1}{2}$ ist, bekommt man imaginäre Lösungen.

Deshalb ist die Lösungsmenge L = {-2;2}

2b.

$-3x^3 + 4x^2 + x + 6 = 0;$

Man versucht eine Lösung durch Probieren zu finden:

Man zerlegt das Absolutglied 6 = 1 · 2 · 3

und probiert ± 1, ±2 und ±3 als Lösungen anzuwenden.

+1 und -1 passen nicht; +2 passt genau!

Wenn eine Lösung $x_1 = 2$ gefunden ist, teilt man die linke Seite der Gleichung durch $x - x_1 = x - 2$ und setzt das Ergebnis gleich Null:
$(-3x^3 + 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = -3x^2 - 2x - 3$; →
$-3x^2 - 2x - 3 = 0$ → Die Diskriminante $D = 4 - 36 < 0$ und die Lösungen x_1 und x_2 sind keine reellen Zahlen.
Lösungsmenge L = {2}

2c.
$2x^5 - 5x^4 + 5x^2 - 2x = 0$; → $x(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2) = 0$
$x_1 = 0$ und $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$; → $2 = 1 \cdot 2$;
Vermutliche Lösungen sind ± 1 und ± 2;
$x_2 = +1$ und $x_3 = -1$ passen genau.
Man teilt die linke Seite der Gleichung durch $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ und setzt das Ergebnis gleich Null:
$(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2):(x^2 - 1) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$;
Die letzte Gleichung hat die Lösungen $x_4 = 2$ und $x_5 = \frac{1}{2}$
Lösungsmange L = $\{-1; 0; \frac{1}{2}; 1, ; 2\}$

4.3 Bruchgleichungen

Man sucht den Definitionsbereich (Nenner darf nicht 0 sein!) und berechnet den Hauptnenner (HN). Danach multipliziert man beide Gleichungsseiten mit dem Hauptnenner und löst die Ergebnisgleichung.

3a.

Definitionsbereich : xxx

$$\frac{x}{2x-1} - \frac{3}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1}; \quad HN \to (2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1;$$

$$\frac{x}{2x-1} - \frac{3}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1} \,\Big|\, \cdot HN \;\to x(2x+1) - 3 = 3(2x-1);$$

$$2x^2 + x - 3 = 6x - 3 \;\to\; 2x^2 - 5x = 0 \;\to x(2x-5) = 0;$$

$x_1 = 0; \;\; x_2 = \frac{5}{2}$; Lösungsmenge L = $\{0; \frac{5}{2}\}$

3b . $1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}} = 0; \; D = R\backslash\{0; \frac{1}{2}; 1\};$

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1};$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}=1+\frac{1}{\frac{x}{x-1}}=1+\frac{x-1}{x}=\frac{x+x-1}{x}=\frac{2x-1}{x};$$

$$1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}=0\rightarrow 1+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{2x-1}=0;$$

HN = (2x – 1)(x – 1);

$$1+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{2x-1}=0 \;\Big|\cdot HN\rightarrow (2x-1)(x-1)+2x-1+x(x-1)=0;$$

$3x^2-2x=0\,;x_1=\frac{2}{3}$, weil x ≠ 0 (siehe D);

Lösungsmenge L = { $\frac{2}{3}$ }

3c. $1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}=0;\; D=R\backslash\{0;\frac{1}{2};1\};$

$$1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}=|siehe\ 3b|=1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{\frac{2x-1}{x}}=$$

$$1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{\frac{-2}{x-1}}{\frac{2x-1}{x}}=1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{-2}{x-1}\cdot\frac{x}{2x-1}=1+\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x}{(x-1)(2x-1)}=0;$$

HN = (x – 1)(2x – 1);

$$1+\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x}{(x-1)(2x-1)}=0;\;\Big|\cdot HN=(x-1)(2x-1)+(x+1)(2x-1)-2x=0;$$

$4x^2-4x=0\rightarrow x_1=0;\ x_2=1$

Keine Lösung, weil beide Werte sind wegen D ausgeschlossen. L = ∅ .

4.4 Wurzelgleichungen

Man löst Wurzelgleichungen durch Quadrieren – **nichtäquivalente Umformung!** – deshalb Probe machen.

4a.

$\sqrt{x^2-3x}=2$

$\left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2=2^2; \rightarrow\ x^2-3x=4; \rightarrow x^2-3x-4=0;$

$x_1=-1;\ \ x_2=\ 4;$

Probe für x_1: $\sqrt{(-1)^2-3(-1)}$ = 2; wahr.
für x_2: $\sqrt{(4)^2-3(4)}$ = 2; wahr.

Lösungsmenge L = {-1;4}

4b.

$\sqrt{x^2-6}-\ \sqrt{2x-3}=0 \rightarrow \sqrt{x^2-6}=\ \sqrt{2x-3}$

$\left(\sqrt{x^2-6}\right)^2=\left(\sqrt{2x-3}\right)^2$; → x^2 -6 = 2x – 3; → x^2 – 2x – 3 = 0;

x_1 = 3; x_2 = -1.

Probe für x_1: $\sqrt{(3)^2-6}=\sqrt{3}; \sqrt{2\cdot 3-3}=\sqrt{3}$; wahr.
für x_2: $\sqrt{(-1)^2-6}=\sqrt{-5};$

Grundmenge $G=R$, weshalb x_2 = -1 falsch ist.
Lösungsmenge L = {3}

$\sqrt{x^2-6}-\ \sqrt{2x-3}=0 \rightarrow \sqrt{x^2-6}=\ \sqrt{2x-3}$

$\left(\sqrt{x^2-6}\right)^2=\left(\sqrt{2x-3}\right)^2; \rightarrow x^2-6=2x-3; \rightarrow x^2-2x-3=0;$

x_1 = 3; x_2 = -1.

Probe für x_1: $\sqrt{(3)^2-6}=\sqrt{3}; \sqrt{2\cdot 3-3}=\sqrt{3}$; wahr.
für x_2: $\sqrt{(-1)^2-6}=\sqrt{-5};\ \ \sqrt{-5}\notin R \rightarrow$ x_2 = -1 falsch.

Lösungsmenge L = {3}

4c.

$\sqrt{x-6} - \sqrt{2x-3} = 3; \rightarrow \left(\sqrt{x-6}\right)^2 = \left(3 + \sqrt{2x-3}\right)^2;$

$x - 6 = 9 + 6\sqrt{2x-3} + 2x - 3; \rightarrow -x - 12 = 6\sqrt{2x-3};$

noch einmal quadrieren:

$(-x-12)^2 = \left(6\sqrt{2x-3}\right)^2;$

$x^2 + 24x + 144 = 36(2x-3) \rightarrow x^2 - 48x + 252 = 0;$

$x_1 = 6;\ x_2 = 42;$

Probe für x_1: $\sqrt{6-6} = 0; \sqrt{2 \cdot 6 - 3} = 3; \rightarrow 0 - 3 = -3 \neq 3;$ falsch

für x_2: $\sqrt{42-6} = 6; \sqrt{2 \cdot 42 - 3} = 9; \rightarrow 6 - 9 = -3 \neq 3;$ falsch

Keine Lösung. L = $\emptyset$.

4.5 Exponentialgleichungen

Man löst z.B. durch Logarithmieren und, falls notwendig, durch Substitution.

5a.

$4^{x+2} - 32 = 0;$ → $4^{x+2} = 32;$ → $2^{2(x+2)} = 2^5;$ → $2^{2x+4} = 2^5;$

Linke und rechte Seiten sind gleich und Basis ist gleich → Exponenten sind gleich;

2x + 4 = 5;

$x_1 = \frac{1}{2}$; Lösungsmenge L = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

5b.

$9^{x+1} + 3^{x+1} - 12 = 0;$ →

$9^{x+1} = 9 \cdot 9^x = 9 \cdot 3^{2x};$ →

$9 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 12 = 0;$ Substitution: $3^x = u;$ →

$9 \cdot u^2 + 3 \cdot u - 12 = 0;$ →

$3 \cdot u^2 + u - 4 = 0;$

$u_1 = -\frac{4}{3};\ u_2 = 1;$

u_1 passt nicht, weil $u = 3^x$ nicht negativ sein kann.

Für $u_2 = 1$ bekommen wir die Gleichung $3^x = 1$.

Nach Logarithmieren zur Basis 3 bekommt man:

$log_3(\ 3^x) = log_3 1 \rightarrow x\, log_3 3 = 0;$

$x_1 = 0$; Lösungsmenge L = {0}

5c.

$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1};$

$3^{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3^x;\ 3^{x+\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot 3^x;\ 2^{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = \frac{1}{2} \cdot (2^2)^x = \frac{1}{2} \cdot 4^x;$

$4^x - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3^x = \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{1}{2} \cdot 4^x; \to 4^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = \sqrt{3} \cdot 3^x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3^x;$

$\frac{3}{2} \cdot 4^x = (\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot 3^x \to \frac{3}{2} \cdot 4^x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^x; | \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \to \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 4^x$
$= 3^x; |: 4^x \to$

$\frac{3\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{3}{4}\right)^x; \to \frac{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{4 \cdot 4^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{3}{4}\right)^x; \to \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^x; \to x = \frac{3}{2};$

$x_1 = \frac{3}{2}$; Lösungsmenge L = $\{\frac{3}{2}\}$

4.6 Logarithmusgleichungen

Man verwendet die Eigenschaften des Logarithmus.

6a.

$2\log_3(x - 4) = 6;$ →
$\log_3(x - 4) = 3;$ →
$x - 4 = 3^3;$ →
$x - 4 = 27;$ →
$x = 31;$
Lösungsmenge L = {31}

6b.

$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1);$ →
$\log_2(9^{x-1} + 7) - \log_2(3^{x-1} + 1) = 2$ →

$\log_2 \frac{(9^{x-1}+7)}{(3^{x-1}+1)} = 2;$ →

$\frac{(9^{x-1}+7)}{(3^{x-1}+1)} = 2^2$; →

$9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1} + 1)$; →

$9^{x-1} = \frac{1}{9} \cdot 9^x = \frac{1}{9} \cdot 3^{2x}$; →

$3^{x-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x$; →

$\frac{1}{9} \cdot 3^{2x} + 7 = 4\,(\frac{1}{3} \cdot 3^x + 1)$; →

$\frac{1}{9} \cdot 3^{2x} - \frac{4}{3} \cdot 3^x + 3 = 0$; | · 9 →

$3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$;
Substitution $3^x = u$ →
$u^2 - 12 \cdot u + 27 = 0$;
$u_1 = 3$; $u_2 = 9$; →
$3^x = 3$; $x_1 = 1$; $3^x = 9 = 3^2$; $x_2 = 2$; Lösungsmenge L = {1;2}

6c.
$\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3(x))^2 = 1$; $0 < x \neq \frac{1}{3}$;

Basiswechsel: $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_3(3x)}$;

$\frac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_3(3x)} + (\log_3(x))^2 = 1$; | · $\log_3(3x)$; →

$\log_3\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3(3x))(\log_3 x)^2 = \log_3(3x)$; →

$\log_3(3) - \log_3(x) + (\log_3(x) + \log_3(3))(\log_3(x))^2 = \log_3(3x)$; →

$1 - \log_3(x) + (\log_3(x) + 1)(\log_3(x))^2 = \log_3(x) + 1$; →

$-2\log_3(x) + (\log_3(x))^2 + (\log_3(x))^3 = 0$; →

$\log_3(x) = u \rightarrow$

$-2u + u^2 + u^3 = 0; \rightarrow$

$u(u^2 + u - 2) = 0; \rightarrow$

$u_1 = 0;\ u_2 = 1;\ u_3 = -2; \rightarrow$

$x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = \frac{1}{9};$

Lösungsmenge $L = \{\frac{1}{9};1;3\}$

4.7 Trigonometrische Gleichungen

Man verwendet die wichtigsten Trigonometrischen Formeln und einen Einheitskreis.

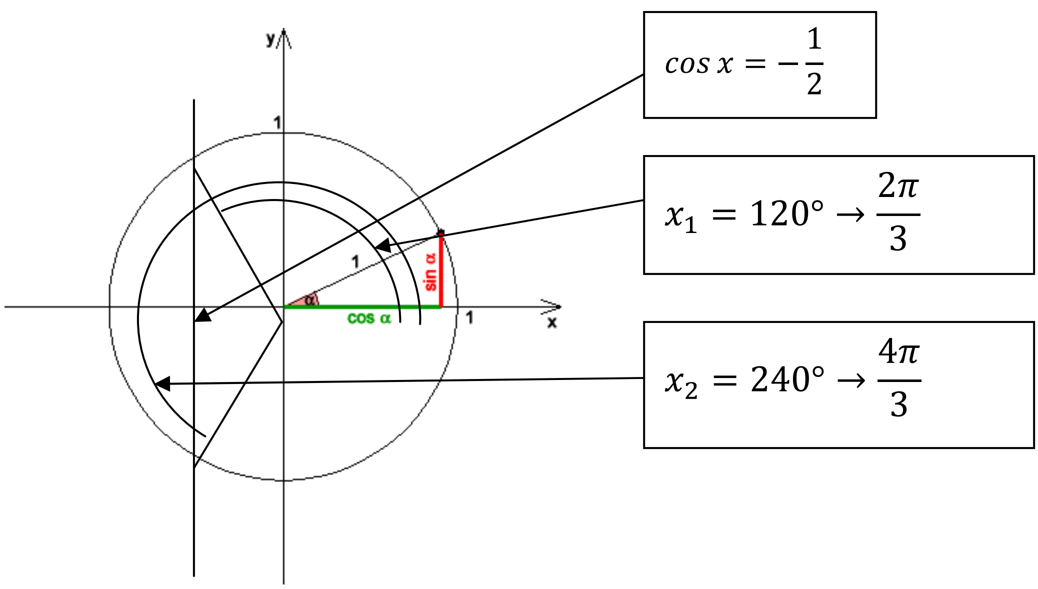
7a.

$6\cos x = -3; \rightarrow$

$\cos x = -\frac{3}{6} \rightarrow$

$\cos x = -\frac{1}{2}$.

Man zeichnet einen Einheitskreis



$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \ x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi;\ k, n \in Z;$

7b.

4 sin x – 2 cos 2x = 1; →

cos 2x = $\cos^2$x – $\sin^2$x = 1 – $\sin^2$x – $\sin^2$x = 1 – 2 $\sin^2$x;

Statt 4sin x – 2 cos 2x = 1 bekommt man die Gleichung:

4sin x – 2 (1 – 2$\sin^2$x) = 1 → 4 sin x – 2 + 4$\sin^2$x = 1;

Nach der Substitution sin x = u wird die Gleichung 4 sin x – 2 + 4$\sin^2$x = 1 in eine quadratische Gleichung umgewandelt:

$$4u^2 + 4u - 3 = 0;\ u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{3}{2};$$

$$-1 \le \sin x \le 1\ \rightarrow \sin x \ne -\frac{3}{2};$$

Es bleibt nur eine Lösung: $\sin x = \frac{1}{2}$;

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi; k, n \in Z;$$

7c.

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 - \sin 2x\,; D = R\backslash\{\frac{3\pi}{4} + k\pi\} \cup \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2}\right\}; k, n \in Z \rightarrow$$

$$\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = 1 - \sin 2x \rightarrow \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = 1 - \sin 2x \rightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 1 - \sin 2x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(\cos x - \sin x)\,(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)\,(\cos x + \sin x)} = 1 - \sin 2x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x} = 1 - \sin 2x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + 2\sin x \cos x} = 1 - \sin 2x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 1 - \sin 2x \rightarrow \cos 2x = (1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos 2x = 1 - \sin^2 2x \rightarrow \cos 2x = \cos^2 2x \rightarrow \cos 2x - \cos^2 2x = 0$$

$$\rightarrow \cos 2x\,(1 - \cos 2x) = 0 \rightarrow \cos 2x = 0; \cos 2x = 1;$$

$$x_1 = \frac{(4k+1)\pi}{4};\ \ x_2 = n\pi; k, n \in Z;$$

4.8 Ungleichungen

Sie können eine recht einfache Methode anwenden: Man betrachtet die Ungleichung wie eine Gleichung, sucht entsprechende Lösungen und Pole (Stützpunkte) und untersucht danach Anfangsungleichungen in allen Stützpunkten und Intervallen zwischen den Stützpunkten.

8a.

$2x - 5 \leq 9$; →

Umwandeln in die Gleichung: $2x - 5 = 9$; → $x = 7$;

→ Stützpunkt: $x_1 = 7$; Intervalle: I_1: $]-\infty, 7[$ und I_2: $]7, +\infty[$;

→ Beliebigen Wert aus I_1 (z.B. $x = 0$) in die Anfangsgleichung einsetzen:
$2 \cdot 0 - 5 \leq 9$. Das ist wahr. (Das Intervall I_1 passt zur Ungleichung.)

→ Beliebigen Wert aus I_2 (z.B. $x = 8$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$2 \cdot 8 - 5 \leq 9$. Das ist wahr ($9 = 9$).

Die Lösungsmenge besteht aus I_1 und x_1:

Lösungsmenge $L =]-\infty; 7]$

8b.

$x^2 - 3x > 4$; →

$x^2 - 3x - 4 = 0$; →

$x_1 = -1$, $x_2 = 4$;

→ Stützpunkte:

$x_1 = -1$,

$x_2 = 4$;

→ Intervalle:

I_1: $]-\infty, -1[$,

I_2: $]-1, 4[$,

I_3: $]4, +\infty[$;

→ Beliebigen Wert aus I_1 (z.B. $x = -2$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$(-2)^2 - 3(-2) > 4$; → wahr;

→ Beliebigen Wert aus I_2 (z.B. $x = 0$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$(0)^2 - 3 \cdot (0) > 4$; → falsch;

→ Beliebigen Wert aus I_3 (z.B. $x = 5$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$(5)^2 - 3 \cdot (5) > 4$; → wahr;

→ Stützpunkt $x_1 = -1$ in die Anfangsungleichung einsetzen:
$(-1)^2 - 3 \cdot (-1) > 4$; → falsch;

→ Stützpunkt $x_2 = 4$ in die Anfangsungleichung einsetzen:
$(4)^2 - 3 \cdot (4) > 4$; → falsch;
Lösungsmenge L = $]-\infty, -1\,[\ \cup\ ]\,4, +\infty[$;

8c.

$$\frac{x}{x+6} < \frac{1}{x}; \rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{1}{x};$$

→ Pole: $x_{p1} = -6$ und $x_{p2} = 0$;
Gleichungslösungen: $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$;

→ Stützpunkte:
$x_1 = -2$;
$x_2 = 3$,
$x_{p1} = -6$
$x_{p2} = 0$;

→ Intervalle:
I_1: $]-\infty, -6[$,
I_2: $]-6, -2[$,
I_3: $]-2, 0[$,
I_4: $]0, 3[$,
I_5: $]3, +\infty[$;

→ Beliebigen Wert aus I_1 (z.B. x = -7) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$\frac{-7}{-7+6} < \frac{1}{-7}$; → falsch;

→ Beliebigen Wert aus I_2 (z.B. x = -5) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$\frac{-5}{-5+6} < \frac{1}{-5}$; → wahr;

→ Beliebigen Wert aus I_3 (z.B. x = -1) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$$\frac{-1}{-1+6} < \frac{1}{-1} \rightarrow falsch;$$

→ Beliebigen Wert aus I_4 (z.B. x = 1) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$$\frac{1}{1+6} < \frac{1}{1} \rightarrow wahr;$$

→ Beliebigen Wert aus I_5 (z.B. x = 4) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$$\frac{4}{4+6} < \frac{1}{4} \rightarrow falsch;$$

→ alle Stützpunkte passen nicht. Lösungsmenge L = $]-6, -2[\cup]\,0,\ 3\,[$;

4.9 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Vergessen Sie nicht, dass $|x| = \begin{cases} x, wenn\ x > 0 \\ 0, wenn\ x = 0 \\ -x, wenn\ x < 0 \end{cases}$

9a.

$2\,|x| - 3 = 4x$

1) Wenn $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$, kann man die Gleichung folgendermaßen umformen:

$2x - 3 = 4x$;

Die Lösung $x = -\frac{3}{2}$ widerspricht der Bedingung $x \geq 0$ und fällt aus.

2) Wenn $x < 0 \rightarrow |x| = -x$, kann man die Gleichung folgendermaßen umformen:

$-2x - 3 = 4x$;

Die Lösung $x = -\frac{1}{2}$ stimmt mit der Bedingung $x < 0$ überein.

$x_1 = -\frac{1}{2}$; Lösungsmenge $L = \{-\frac{1}{2}\}$

9b.

$x^2 - |x - 4| = 16$

1) Wenn $x - 4 \geq 0 \rightarrow |x - 4| = x - 4$, kann man die Gleichung folgendermaßen umformen:

$x^2 - x + 4 = 16$;

Die Lösungen sind $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$.

Die Lösung $x = -3$ widerspricht der Bedingung $x \geq 4$ und fällt aus.

Die Lösung $x = 4$ stimmt mit der Bedingung $x \geq 4$ überein.

2) Wenn $x - 4 < 0 \rightarrow |x - 4| = -x + 4$, kann man die Gleichung folgendermaßen umformen:

$x^2 + x - 4 = 16$;

Die Lösungen sind $x_1 = -5$ und $x_2 = 4$.

Die Lösung $x = -5$ stimmt mit der Bedingung $x < 4$ überein.

Die Lösung $x = 4$ widerspricht der Bedingung $x < 4$ und fällt aus.

$x_1 = -5$; $x_2 = 4$; Lösungsmenge $L = \{-5;4\}$

9c.
|2x - 5| < 3
1) Wenn 2x – 5 ≥ 0 → |2x - 5| = 2x- 5,
kann man die Gleichung folgendermaßen umformen:
2x – 5 < 3;
Die Lösung - ∞ < x < 4 stimmt mit der Bedingung x ≥ $\frac{5}{2}$ nur innerhalb des Intervalls [$\frac{5}{2}$,4[überein.

2) Wenn 2x – 5 < 0 → |2x - 5| = -2x + 5,
kann man die Gleichung folgendermaßen umformen:
-2x + 5 < 3;
Die Lösung 1 < x < ∞ stimmt mit der Bedingung x < $\frac{5}{2}$ nur innerhalb des Intervalls]1,$\frac{5}{2}$[überein.

Lösungsmenge L =]1,4[

4.10 Lineare Gleichungssysteme

Nach dem Gauß'schen Lösungsverfahren wird das lineare Gleichungssystem (LGS) zuerst durch äquivalente Umformung auf Stufenform gebracht, dann wird die letzte Gleichung gelöst. Nun werden durch einsetzen in die vorherige Gleichungen schrittweise die anderen Variablen bestimmt.

10a.
Gleichung 1 (G1): - x + 2y – z = 1
Gleichung 2 (G2): 3x – y + 2z = -2 →
Gleichung 3 (G3): x + y + 1 = z

(G1): - x + 2y – z = 1
(G2): 3x – y + 2z = -2 →
(G3): x + y - z = -1

Man bringt LGS auf Stufenform

$$\begin{aligned} (G1):&\ -x + 2y - z = 1 \\ (G2):&\ 3x - y + 2z = -2 \\ (G3):&\ x + y - z = -1 \end{aligned} \rightarrow \left| \begin{matrix} (G1) \\ \frac{1}{3} \cdot (G2) + (G1) \\ (G3) + (G1) \end{matrix} \right| \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (G1):\ -x + 2y - z = 1 \\ (G2):\ \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ (G3):\ 3y - 2z = 0 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{c} (G1) \\ (G2) \\ \frac{-5}{9}(G3) + (G2) \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (G1):\ -x + 2y - z = 1 \\ (G2):\ \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ (G3):\ \frac{7}{9}z = \frac{1}{3} \end{array}$$

Wir haben die Stufenform erreicht.

1) Jetzt löst man die letzte Gleichung: $z = \frac{3}{7}$;

2) Dann setzt man $z = \frac{3}{7}$ in die zweite Gleichung und findet y: $y = \frac{2}{7}$

Nun setzt man $z = \frac{3}{7}$ und $y = \frac{2}{7}$ in der erste Gleichung und findet $x = -\frac{6}{7}$

$$x = -\frac{6}{7};\ y = \frac{2}{7}; z = \frac{3}{7};$$

10b.

$$\begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ 2x + y + z = -1 \end{array} \left| \begin{array}{c} (G1) \\ \frac{1}{3} \cdot (G2) + (G1) \\ \frac{1}{2} \cdot (G3) + (G1) \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (G1):\ -x + 2y - z = 1 \\ (G2):\ \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ (G3):\ \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{c} (G1) \\ (G2) \\ \frac{-1}{3}(G3) + \frac{1}{2}(G2) \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (G1):\ -x + 2y - z = 1 \\ (G2):\ \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ (G3):\ \mathbf{0 = 0} \end{array}$$

Es sind nur zwei Gleichungen mit drei Unbekannten geblieben.
In diesen Fall nimmt man eine Variable, z.B. z, als Parameter $t \in R$
und löst nicht die letzte, sondern die vorletzte Gleichung: $y = \frac{1+t}{5}$.
Nun setzt man $z = t$ und $y = \frac{1+t}{5}$ in die erste Gleichung ein und findet
$x = \frac{-3-3t}{5} = \frac{-3(1+t)}{5}$;
Weil t eine beliebige reelle Zahl ist, hat unser lineares Gleichungssystem unendlich viele Lösungen:

$x = \frac{-3(1+t)}{5}; y = \frac{1+t}{5}$; z = t, wobei Paramter t ∈ R

10c.

$$\begin{array}{rcl|c|l} 4x + y - z &=& 1 & (G1) & \\ -x - y + 3z &=& 5 & 4(G2)+(G1) & \rightarrow \\ 2x - y + 5z &=& 0 & -2(G3)+(G1) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|c|l} 4x + y - z &=& 1 & (G1) & \\ -3y + 11z &=& 5 & (G2) & \rightarrow \\ 3y - 11z &=& 1 & (G3)+(G1) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|c|l} 4x + y - z &=& 1 & (G1) & \\ -3y + 11z &=& 5 & (G2) & \rightarrow \\ \mathbf{0} &=& \mathbf{1} & \boldsymbol{Widerspruch} & \end{array}$$

Keine Lösung

5 Musterprüfungen

5.1 Prüfung 1

- Taschenrechner sind nicht zugelassen.
- Sie können die Formelsammlung benutzen, die Sie mit den Aufgaben erhalten.
- Arbeitszeit: 60 Minuten

---

1. **Aufgabe**
   Berechnen Sie alle reellen x, für die gilt:

   $$4x^3 - x - 1 \leq 2x$$

---

2. **Aufgabe**
   Lösen Sie die folgende Gleichung:

   $$x^2 - \sqrt{x^2 + 1} - 5 = 0$$

---

3. **Aufgabe**
   Lösen Sie die folgende Gleichung

   $$3x + 4 - 2|x| = 2$$

---

4. **Aufgabe**
   Lösen Sie die folgende Gleichung

   $$7^x \cdot 5^{-x} - 3^{1-x} = 0$$

5.2 Prüfung 2

- Taschenrechner sind nicht zugelassen.
- Sie können die Formelsammlung benutzen, die Sie mit den Aufgaben erhalten.
- Arbeitszeit: 60 Minuten

---

1. Aufgabe

Berechnen Sie alle reellen x, für die gilt:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=0$$

---

2. Aufgabe

Vereinfachen Sie den Folgenden Term

$$\frac{a^{k+1}-2a^{k+2}+a^{k+3}}{a^{k}-a^{k+1}}$$

---

3. Aufgabe

Man berechne alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$sin(3x)-sin^3(x)=0$$

---

4. Aufgabe

Lösen Sie die folgende Gleichung

$$log_{\sqrt{2}}(x)\cdot log_2(x)\cdot log_{2\sqrt{2}}(x)\cdot log_4(x)=54$$

6 Formelsammlung

Diese Formelsammlung können Sie während der Prüfung benutzen.

Zeichen	Sprechweise / Bedeutung	Zeichen	Sprechweise / Bedeutung
< ≤	kleiner als kleiner oder gleich	$\log_a(x)$	Logarithmus x zur Basis a
> ≥	größer als größer oder gleich	lg(x)	Logarithmus x zur Basis 10
]a,b[	offenes Intervall von a bis b	ln(x)	Logarithmus x zur Basis e
[a,b]	abgeschlossenes Intervall von a bis b	lb(x)	Logarithmus x zur Basis 2
[a,b[,]a,b]	halboffenes Intervall von a bis b		
∞	unendlich	N	Menge der natürlichen Zahlen
f(x)	f von x (Wert der Funktion f an der Stelle x)	Z	Menge der ganzen Zahlen
a^b	a hoch b (Potenz)	Q	Menge der rationalen Zahlen
$\sqrt{a}$ $\sqrt[n]{a}$	Quadratwurzel aus a n-te Wurzel aus a	R	Menge der reellen Zahlen

Potenzen	***Wurzeln***	***Logarithmen***
$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a;$ $a\ heißt\ Basis, n\ heißt\ Exponent$ $a^0 = 1;\ \ a^1 = a;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n};$ $a \in R\backslash\{0\}, n \in N$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n;$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n;$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n};$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; a \geq 0.$ $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}; a > 0$	$\sqrt[n]{a} = b\ \leftrightarrow b^n = a;$ $a\ heißt\ Radikand,$ $n\ heißt\ Wurzelexponent\ ,$ $b > 0;$ $a \in \boldsymbol{R} \wedge a \geq 0, n \in N\{0; 1\}$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$ $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}};$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b};$ $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}};\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a};$ a≥ 0 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}};$ a>0	$log_a b = c\ \leftrightarrow\ a^c = b$ $a\ heist\ Basis;$ $a \in R, a > 0, a \neq 1$ $b\ heist\ Numerus;$ $b \in R,\quad b > 0;$ $log_a 1 = 0;\ \ log_a a = 1;$ $log_a(u \cdot v) = log_a u + log_a v;$ $mit\ u, v \in R,$ $und\ \ u, v > 0;$ $log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a u - log_a v;$ $log_a(u^r) = r \cdot log_a u;\ r \in R$ $log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot log_a u; n \in N\backslash\{0\}$
Basiswechsel von Logarithmen	$\boldsymbol{log_a b} = \frac{\boldsymbol{log_c b}}{\boldsymbol{log_c a}} = \frac{lgb}{lga} = \frac{lnb}{lna};\quad (log_a b) \cdot (log_b a) = 1$	

Binomische Formeln
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$; $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$; $\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2\cdot b \pm 3a\cdot b^2 + b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp a\cdot b + b^2)$
Mehrgliedrige Ausdrücke
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a\cdot b + 2a\cdot c + 2b\cdot c$;

Prozentrechnen					
Begriffe	*Prozentsatz 16%*	*von*	*Grundwert 400 kg*	*sind*	*Prozentwert 64 kg*
Bezeichnung	*p%*		*G*		*W*
Formel	$p\% = \frac{100W}{G}\%$		$G = \frac{100W}{p}$		$W = \frac{p\cdot G}{100}$
Zinsen					
Begriffe	*Zinssatz 5%*		*Kapital 700€*		*Zins 35€*
Bezeichnung	*p%*		*K*		*Z*
Formel	$p\% = \frac{100Z}{K}\%$		$K = \frac{100Z}{p}$		$Z = \frac{K\cdot p}{100}$
Zinseszins					
Wird ein Kapital K_0 mit Zinssatz p% über n Jahre verzinst, so beträgt das Endkapital K_n nach n Jahren:	$K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$				

Quadratische Gleichungen			
	allgemeine Form	**Normalform**	
Gleichung	$ax^2 + bx + c = 0$	$x^2 + px + q = 0$	*a,b,c,p,q* $\in$ *R*
Lösungen	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\cdot c}}{2a}$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	
Diskriminante	$D = b^2 - 4ac$		*a≠0*
Lösung in R	D > 0 => L={x_1;x_2} zwei verschiedene Lösungen D = 0 => L = {x_1} = {x_2} zwei gleiche Lösungen D < 0 => L = ∅ keine Lösung		

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

	Umkehrfunktionen
$Sinusfunktion\ f(x) = \sin x$ $D = R \quad W = [-1,+1],$ $Nullstellen: x_k = k\pi \quad k \in N$ $\sin(x+2k\pi) = \sin x \qquad Periode\ \ 2\pi$	$Arkussinusfunktion\ f(x) = \arcsin x$ $D = [-1,+1] \qquad W = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $Nullstellen: x_0 = 0$
$Kosinusfunktion\ f(x) = \cos x$ $D = R \quad W = [-1,+1],$ $Nullstellen: x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in N$ $\cos(x+2k\pi) = \cos x \qquad Periode\ \ 2\pi$	$Arkuskosinusfunktion\ f(x) = \arccos x$ $D = [-1,+1] \qquad W = [0,\pi]$ $Nullstellen: x_0 = 1$
$Tangensfunktion\ f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $D = R\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\} \quad k \in N \quad W =]-\infty,+\infty[$ $Nullstellen: x_k = k\pi \quad k \in Z$ $\tan(x+k\pi) = \tan x \qquad Periode\ \ \pi$	$Arkustangensfunktion\ f(x) = \arctan x$ $D = R \qquad W =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ $Nullstellen: x_0 = 0$
$Kotangensfunktion\ f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x}$ $D = R\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\} \quad k \in N \quad W =]-\infty,+\infty[$ $Nullstellen: x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in N$ $\cot(x+k\pi) = cotx \qquad Periode\ \ \pi$	

Grundbeziehungen zwischen Winkelfunktionen

$\boldsymbol{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$	$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}$ $\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta}$ $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$ $\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta}$
$\boldsymbol{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha}$ $\boldsymbol{2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha}$	
$\boldsymbol{\sin^2\alpha = \frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}}$ $\boldsymbol{\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$	
Vielfache und Teile	$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
	$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
	$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \alpha \in [\,0,2\pi];\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \alpha \in [-\pi,\pi];$
	$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

Spezielle Funktionswerte trigonometrischer Funktionen							
Gradmaß	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	360^0
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$sin\, x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	0
$cos\, x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$tan\, x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	0