Formelsammlung Mathematik

http://www.fersch.de

©Klemens Fersch

16. August 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Definition

Ein Menge (Großbuchstaben) besteht aus unterscheidbaren Elementen.

$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$

Mengen in aufzählender Form

$\mathbb{A} = \{a; b; c\}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\mathbb{B} = \left\{-2; 0,4; \sqrt{3}\right\}$

Mengen in beschreibender Form

$\mathbb{M} = \{x|x \text{ hat die Eigenschaft E}\}$

$\mathbb{M}_1 = \{x|x \text{ Menge aller Primzahlen}\}$
$\mathbb{M}_2 = \{x|x \text{ alle natürlichen Zahlen, die größer als 2 sind}\}$

$\in$ Element - $\notin$ nicht Element

$\mathbb{M} = \{a; b; c\}$
$b \in \mathbb{M}$
$e \notin \mathbb{M}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$2 \in \mathbb{A}$
$5 \notin \mathbb{A}$

$\subset$ Teilmenge - $\not\subset$ nicht Teilmenge

$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{b; c\}$
$\mathbb{C} = \{b; c; f\}$
$\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ Jedes Element von B ist auch Element von A
$\mathbb{C} \not\subset \mathbb{A}$ Nicht jedes Element von C ist auch Element von A

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\{1; 4\} \subset \mathbb{A}$
$\{1; 4; 5\} \not\subset \mathbb{A}$

Gleichheit $A = B$

$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{A} = \mathbb{B}$ Jedes Element von $\mathbb{A}$ ist auch Element von $\mathbb{B}$
Jedes Element von $\mathbb{B}$ ist auch Element von $\mathbb{A}$

$\mathbb{A} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
$\mathbb{B} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
$\mathbb{A} = \mathbb{B}$

Leere Menge $\{\}$

$\mathbb{A} = \{\} = \emptyset$
Menge A enthält keine Elemente

1.1.2 Mengenoperationen

Schnittmenge $\cap$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$
Alle Elemente die in A und zugleich in B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{8; 12\}$
$\{4; 5; 23\} \cap \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{4; 5\}$

Vereinigungsmenge $\cup$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
Alle Elemente die in A oder B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1; 7; 8; 12; 15; 24\}$
$\{4; 5; 23\} \cup \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{0; 1; 4; 5; 12; 23\}$

Differenz $\setminus$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$
Alle Elemente die in A, aber nicht in B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{2; 7; 15\}$
$\{4; 5; 23\} \setminus \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{23\}$

1.1.3 Zahlenmengen

Natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

$3 \in \mathbb{N} \qquad -3 \notin \mathbb{N}$
$0 \notin \mathbb{N} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$

Natürlichen Zahlen und Null

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$

$3 \in \mathbb{N}_0 \qquad -3 \notin \mathbb{N}_0$
$0 \in \mathbb{N}_0 \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}_0$

Ganzen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$

$3 \in \mathbb{Z} \qquad -3 \in \mathbb{Z}$
$0 \in \mathbb{Z} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$

Rationalen Zahlen

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ sind
- Bruchzahlen
- endliche Dezimalzahlen
- unendliche periodische Dezimalzahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{Q} \qquad 3 \in \mathbb{Q} \qquad -3 \in \mathbb{Q} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \qquad 0 \in \mathbb{Q}$
Jede endliche Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.
$0,223 = \frac{223}{100} \in \mathbb{Q} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$
Jede unendliche periodische Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.
$0,3333... = 0,\overline{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \qquad 0,535353.. = 0,\overline{53} = \frac{53}{99} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}^+$ = positve rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_0^+$ = positve rationale Zahlen und Null
$\mathbb{Q}^-$ = negative rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_0^-$ = negative rationale Zahlen und Null
$\mathbb{Q} \setminus \{3,4\}$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4
$\mathbb{Q} \setminus [-3;5]$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4
$\mathbb{Q} \setminus]-3;5[$ = rationale Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$ sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535.. \in \mathbb{I}$
Eulersche Zahl $e = 2,7182818284.. \in \mathbb{I}$
$\sqrt{2} \in \mathbb{I} \qquad \sqrt{3} \in \mathbb{I} \qquad \sqrt{4} = 2 \notin \mathbb{I} \qquad 3 \notin \mathbb{I} \qquad -0,3 \notin \mathbb{I}$

Reellen Zahlen

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ sind

- rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
- irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{R} = \{$jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl$\}$

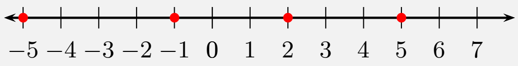
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535.. \in \mathbb{R}$
Eulersche Zahl $e = 2,7182818284.. \in \mathbb{R}$
$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{3} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R} \qquad 3 \in \mathbb{R} \qquad -0,3 \in \mathbb{R}$
$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^+$ = positve reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$ = positve reelle Zahlen und Null
$\mathbb{R}^-$ = negative reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^-$ = negative reelle Zahlen und Null
$\mathbb{R} \setminus \{3,4\}$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4
$\mathbb{R} \setminus [-3;5]$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4
$\mathbb{R} \setminus]-3;5[$ = reelle Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Vergleichszeichen

$a = b$	a ist gleich b
$a \neq b$	a ist ungleich b
$a < b$	a ist kleiner als b
$a > b$	a ist größer als b
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a ist größer oder gleich b

$3 + 4 = 7 \qquad 3 + 4 \neq 8$



$-5 < -1 \qquad -1 > -5 \qquad 2 > -1 \qquad 2 < 5$
$5 \leqq 5 \qquad 7 \geqq 5$

1.1.4 Primfaktoren - ggT - kgV

Primzahlen

Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die nur durch eins und sich selbst teilbar ist.

Primzahlen:
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,$
$47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107.....$

Primfaktorenzerlegung

Zerlegung einer natürlichen Zahl als Produkt aus Primzahlen.

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch ...
2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.
3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
4 teilbar, wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind.
5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.
6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
8 teilbar, wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind.
9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.
12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.
15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.
18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.
Die Quersumme einer Zahl, ist die Summe ihrer Ziffern.

$5|45$ 5 ist Teiler von 45
$3|123$ 3 ist Teiler von 123
Quersumme von 123: $1+2+3=6$
$3|6 \Rightarrow 3|123$

Vielfachmenge V(a)

Alle Vielfachen von einer natürlichen Zahl a.

$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48..\}$
$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84..\}$
$V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45..\}$

Teilermenge T(a)

Alle ganzzahligen Teiler einer Zahl a.

$T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$
$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$
$T(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

Größter gemeinsamer Teiler ggT(a,b)

Methode 1: Aus den Teilermengen von a und b den größten Teiler ablesen
Methode 2: Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren bilden.

$\text{ggT}(12; 18) = 6$
Aus den Teilermengen den größten Teiler ablesen
T(12)={1;2;3;4;6;12} T(18)={1;2;3;6;9;18}
Gemeinsame Primfaktoren von 12 und 18

12	2	2	3	
18	2		3	3
ggT(12; 18)	2		3	

$\text{ggT}(12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV(a,b)

Methode 1: Aus den Vielfachmengen von a und b das kleinste Vielfache ablesen.
Methode 2: Das Produkt aller Primfaktoren von a und den zusätzlichen Primfaktoren von b bilden.

$\text{kgV}(12; 18) = 36$
Aus den Vielfachmengen das kleinste Vielfache ablesen
V(12)={12;24;36;48;60;72.. } V(18)={18;36;54;72;90..}
Primfaktoren von 12 und zusätzlichen Primfaktoren von 18

12	2	2	3	
18	2		3	3
kgV(12; 18)	2	2	3	3

$\text{kgV}(12; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Interaktive Inhalte: $ggT(a,b)$ $kgV(a,b)$ - $ggT(a,b,c)$ $kgV(a,b,c)$ -

1.1.5 Grundrechnungen

Addition

a	+	b	=	c
1.Summand	+	2.Summand	=	Summe

$3+2=5$
$2x+3x=5x$
$2x^2+3x^2=5x^2$
$5x^2y+7x^2y=12x^2y$
$2xy+3xy+4z+5z=5xy+9z$

Subtraktion

a	-	b	=	c
Minuend	-	Subtrahend	=	Differenz

$3-2=1$
$3x-2x=x$
$2x^2-3x^2=-x^2$
$5x^2y-7x^2y=-2x^2y$
$3e^x-2e^x=e^x$

Multiplikation

a	·	b	=	c
1.Faktor	·	2.Faktor	=	Produkt

$3\cdot 2=6$
$2x\cdot 3x=6x^2$
$2x^2\cdot 3x^2=6x^4$
$5x^2y\cdot 7x^2y=35x^4y$
$2xy\cdot 3xy\cdot 4z\cdot 5z=120x^2y^2z^2$

Division

a	:	b	=	c
Dividend	:	Divisor	=	Quotient

$\frac{a}{b}=c \qquad \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}=\text{Quotient}$

$12:3=4$
$\frac{12}{3}=4$

Interaktive Inhalte: Rechenblock -

1.1.6 Grundrechenregeln

Kommutativgesetz

$a\cdot b=b\cdot a$
$a+b=b+a$

$3+2=2+3=5$
$2x+3x=3x+2x=5x$
$3\cdot 2=2\cdot 3=6$
$2x\cdot 3x=3x\cdot 2x=6x^2$

Assoziativgesetz

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
$(a+b)+c=a+(b+c)$

$4+(3+2)=(4+3)+2=9$
$4x+(3x+2x)=(4x+3x)+2x=9x$
$4\cdot(3\cdot 2)=(4\cdot 3)\cdot 2=24$
$4x\cdot(3x\cdot 2x)=(4x\cdot 3x)\cdot 2x=24x^3$

Distributivgesetz

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$3\cdot(2+5)=3\cdot 2+3\cdot 5=21$
$3\cdot(2x+5)=3\cdot 2x+3\cdot 5=6x^2+15$

Reihenfolge der Rechenarten

- Klammern vor
- Potenzierung vor
- Punktrechnung (Mulitiplikation und Division) vor
- Strichrechnung (Addition und Subtraktion)
- von links nach rechts

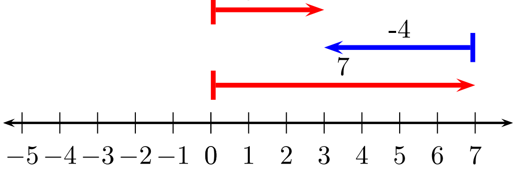
$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 5 \cdot 2^3)^2$

Innerhalb der Klammer Potenzierung:	$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 5 \cdot 8)^2$
Innerhalb der Klammer Punktrechnung:	$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 40)^2$
Innerhalb der Klammer Strichrechnung:	$40 - 5 \cdot (42 - 40)^2$
Potenzierung:	$100 - 40 - 5 \cdot 2^2$
Punktrechung:	$100 - 40 - 5 \cdot 4$
von links nach rechts:	$100 - 40 - 20$
Ergebnis:	$60 - 20 = 40$

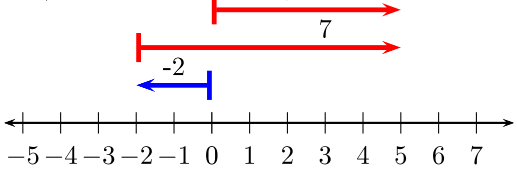
Interaktive Inhalte: Rechenblock -

1.1.7 Vorzeichenregel

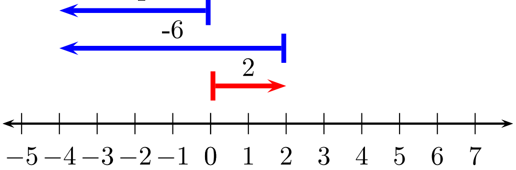
$7 - 4 = 3$



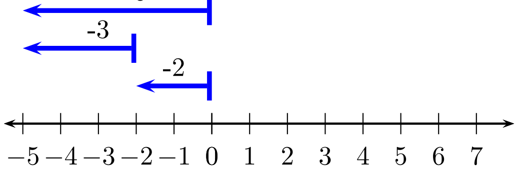
$-2 + 7 = 5$



$2 - 6 = -4$



$-2 - 3 = -5$



Vorzeichen und Klammern

$+(+a) = +a$
$+(-a) = -a$
$-(+a) = -a$
$-(-a) = +a$

$+(+2) = +2$
$-(-2) = +2$
$+(-2) = -2$
$-(+2) = -2$

Multiplikation

$+a \cdot (+b) = +c$
$-a \cdot (-b) = +c$
$+a \cdot (-b) = -c$
$-a \cdot (+b) = -c$

$+3 \cdot (+2) = +6$
$-3 \cdot (-2) = +6$
$+3 \cdot (-2) = -6$
$-3 \cdot (+2) = -6$

Division

$\frac{+a}{+b} = +c$
$\frac{-a}{-b} = +c$
$\frac{+a}{-b} = -c$
$\frac{-a}{+b} = -c$

$\frac{+6}{+3} = +2$
$\frac{-6}{-3} = +2$
$\frac{+6}{-3} = -2$
$\frac{-6}{+3} = -2$

Addition und Subtraktion

Bei gleichem Vorzeichen werden die Beträge addiert. Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen.
Bei verschiedenem Vorzeichen werden die Beträge subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größerem Betrag.

$10 + 4 = 14$
$-10 - 4 = -(10 + 4) = -14$
$10 - 4 = 6$
$-10 + 6 = -(10 - 6) = -4$
$3x + 4x = 7x$
$-3x - 4x = -(3x + 4x) = -7x$
$3x - 4x = -(4x - 3x) = -x$
$-3x + 4x = 4x - 3x = x$

Betrag einer Zahl

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

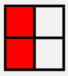
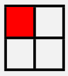
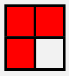
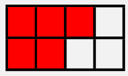
$|-3| = 3$
$|3| = 3$

Interaktive Inhalte: Rechenblock -

1.1.8 Brüche

Bruch

Dividend : Divisor = Quotient
$\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{Z}{N}$=Wert des Bruchs

 $= \frac{1}{2}$  $= \frac{1}{4}$  $= \frac{3}{4}$  $= \frac{5}{8}$

Besondere Brüche

- Echter Bruch: Nenner größer als Zähler
- Unechter Bruch:Zähler größer als Nenner
- Gemischte Zahl: Ganze Zahl + Bruch
- Stammbrüche: Zähler ist 1
- Gleichnamige Brüche: Nenner ist gleich
- Ungleichnamige Brüche:Nenner ist verschieden
- Kehrwert:Zähler und Nenner vertauschen
- Scheinbrüche:Scheinbrüche sind natürliche Zahlen

Echter Bruch:$\frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{1}{3}$

Unechter Bruch:$\frac{20}{4}; \frac{15}{7}; \frac{8}{3}$

Gemischte Zahl:$2\frac{2}{4}; 6\frac{5}{7}; 7\frac{8}{3}$

Stammbrüche:$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$

Gleichnamige Brüche:$\frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{8}{4}$

Ungleichnamige Brüche:$\frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{8}{3}$

Kehrwert:$\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{2}; \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{5}$

Scheinbrüche:$\frac{4}{2} = 2; \frac{28}{7} = 4$

Erweitern von Brüchen

Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$

Kürzen von Brüchen

• Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividieren

$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$

• Zähler und Nenner durch den ggT(Zähler;Nenner) teilen

$ggT(a,b) = c$

$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$

• Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen und gleiche Primfaktoren kürzen

$\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}$

$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$

$\mathrm{ggT}(18;12) = 6$

$\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$

$\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3}$

$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

• Hauptnenner: Produkt der beiden Nenner

Erweiterungsfaktoren: d und b

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$

• Hauptnenner: kgV(b,d)=c

Erweiterungsfaktoren: $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{d}$

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

Hauptnenner: $3 \cdot 4 = 12$

Erweiterungsfaktoren: 4 **und** 3

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

$\frac{3}{12} + \frac{5}{18}$

Hauptnenner: kgV($12, 18$) $= 36$

Erweiterungsfaktoren: $\frac{36}{12} = 3 \quad \frac{36}{18} = 2$

$\frac{3}{12} + \frac{5}{18} = \frac{3 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{9+10}{36} = \frac{19}{36} = \frac{19}{36}$

Multiplikation von Brüchen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24}$

Division von Brüchen

Mit dem Kehrwert des Bruches multiplizieren

Bruch durch Bruch

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Bruch durch Zahl

$\frac{\frac{a}{b}}{e} = \frac{a}{b} : e = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{e} = \frac{a}{b \cdot e}$

Zahl durch Bruch

$\frac{e}{\frac{c}{d}} = e : \frac{c}{d} = \frac{e}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{e \cdot d}{c}$

Doppelbruch

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20}$

$4 : \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{6}{5} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5}$

$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} == \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20}$

Interaktive Inhalte: Kürzen - $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ - $a\frac{b}{c} - d\frac{e}{f}$ - Rechenblock -

1.1.9 Bruchteile - Prozent - Promille

Bruchteile

$$\text{Bruchteil (relativer Anteil)} = \frac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Ganze}}$$

$$\text{absoluter Anteil} = \text{Bruchteil} \cdot \text{Ganze}$$

$$\text{Ganze} = \frac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Bruchteil}}$$

Welcher Bruchteil sind 200 Euro von 800 Euro?

$\frac{200}{800} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Gesucht: absoluter Anteil

$\frac{1}{4}$ von 800 Euro?

$\frac{1}{4} \cdot 800 Euro = 200 Euro$

Gesucht: Ganze

$\frac{1}{4}$ sind 200 Euro?

$\frac{200 Euro}{\frac{1}{4}} = 800 Euro$

Prozent

$\frac{p}{100} = p\%$

p Hundertstel = p Prozent

Prozent= Bruchteil ·100 %

Bruchteil= $\frac{\text{Prozent}}{100\%}$

$\frac{1}{100} = 1\%$ $\quad \frac{2}{100} = 2\%$

$\frac{34}{100} = 34\%$ $\quad \frac{12,5}{100} = 12,5\%$

$\frac{200}{100} = 200\%$ $\quad \frac{125}{100} = 125\%$

$\frac{100}{100} = 100\%$

Wie viel Prozent sind 200 Euro von 800 Euro?

$\frac{200}{800} \cdot 100\% = \frac{2}{8} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$

Promille

$\frac{p}{1000} = p$ ‰

p Tausendstel = p Promille

Promille= Bruchteil ·1000 ‰

Bruchteil= $\frac{\text{Promille}}{1000‰}$

$\frac{1}{1000} = 1$ ‰ $\quad \frac{2}{1000} = 2$ ‰

$\frac{34}{1000} = 34$ ‰ $\quad \frac{12,5}{1000} = 12,5$ ‰

$\frac{2000}{1000} = 2000$ ‰ $\quad \frac{125}{1000} = 125$ ‰

Wie viel Promille sind 200 Euro von 800 Euro?

$\frac{200}{800} \cdot 1000$ ‰ $= \frac{2}{8} \cdot 1000$ ‰ $= \frac{1}{4} \cdot 1000$ ‰ $= 250$ ‰

1.1.10 Prozentrechnung

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

Grundwert	G		
Prozentsatz	p	%	Prozent
Prozentwert	P_w		

$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ $\quad p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$

Interaktive Inhalte: $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ - $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ - $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$ -

1.1.11 Promillerechnung

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

Grundwert	G
Promille	p
Promillewert	P_w

$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ $\quad p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$

Interaktive Inhalte: $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ - $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ - $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$ -

1.1.12 Dezimalbruch

Stellenwerttafel

Bruch	M	HT	ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t	zt	ht		Dezimalbruch
$\frac{1}{10}$							0	,	1						$0,1$
$\frac{1}{100}$							0	,	0	1					$0,01$
$\frac{23}{100}$							0	,	2	3					$0,23$
$\frac{456}{1000}$							0	,	4	5	6				$0,456$
$12\frac{3}{10000}$						1	2	,	0	0	0	3			$12,0003$
$567\frac{30}{10000}$					5	6	7	,	0	0	3	0			$567,003$

Z	Zehner	10^1	10	
H	Hunderter	10^2	100	
T	Tausender	10^3	1000	
ZT	Zehntausender	10^4	10000	
HT	Hunderttausender	10^5	100000	
M	Million	10^6	1000000	

E	Einer	10^0	1	
z	Zehntel	10^{-1}	$0,1$	$\frac{1}{10}$
h	Hundertstel	10^{-2}	$0,01$	$\frac{1}{100}$
t	Tausendstel	10^{-3}	$0,001$	$\frac{1}{1000}$
zt	Zehntausendstel	10^{-4}	$0,0001$	$\frac{1}{10000}$
ht	Hunderttausendstel	10^{-5}	$0,00001$	$\frac{1}{100000}$

Bruch - Dezimalbruch

- Erweitern des Bruchs auf Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw.
Werte in die Stellenwerttafel einsetzen.
- Schriftliches Dividieren

$\frac{1}{10}=0,1$ $\quad\frac{1}{100}=0,01$

$\frac{1}{1000}=0,001$ $\quad\frac{1}{2}\frac{5}{10}=0,5$ $\quad\frac{4}{25}=\frac{16}{100}=0,16$

$\frac{3}{8}=\frac{375}{1000}=0,375$ $\quad\frac{12,5}{100}=0,125$

$\frac{201}{1000}=0,201$ $\quad\frac{125}{10000}=0,0125$

$\frac{100}{100}=1$

$\frac{2}{3}=2:3=0,666...=0,\overline{6}$

Dezimalbruch - Bruch

- Endlicher Dezimalburch
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner die entsprechende Stufenzahl(10,100,1000)
- Periodischer Dezimalbruch
- Periode beginnt direkt nach den Komma
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner den entsprechenden Bruch mit 9 (9,99,999)

$0,201=\frac{201}{1000}$ $\quad 0,0001=\frac{1}{10000}$

$0,\overline{1}=\frac{1}{9}$ $\quad 0,\overline{2}=\frac{2}{9}$

$0,\overline{12}=\frac{12}{99}$ $\quad 0,\overline{255}=\frac{255}{999}$

Multiplizieren oder Dividieren mit Stufenzahl

Multipliziern einer Dezimalzahl mit
10 - Komma um 1 Stelle nach rechts verschieben
100 - Komma um 2 Stellen nach rechts verschieben
1000 - Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben
......
Dividieren einer Dezimallzahl durch
10 - Komma um 1 Stelle nach links verschieben
100 - Komma um 2 Stellen nach links verschieben
1000 - Komma um 3 Stellen nach links verschieben
......

$345,677\cdot 10=3456,77$ $\quad 345,677\cdot 100=34567,7$

$345,677\cdot 1000=345677,0$ $\quad 345,677\cdot 10000=3456770,0$

$345,677:10=34,5677$ $\quad 345,677:100=3,45677$

$345,677:1000=0,345677$ $\quad 345,677:10000=0,0345677$

Runden von Dezimalbrüchen

Ziffer der zu rundenten Stelle bestimmen.
• Ist die nachfolgende Ziffer 0,1,2,3,4, dann wird abgerundet. Die gerundete Stelle bleibt unverändert
• Ist die nachfolgende Ziffer 5,6,7,8,9, dann wird aufgerundet. Die gerundete Stelle wird um eins erhöht.
• Wenn nach dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffer weggelassen.
• Wenn vor dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffern durch Null ersetzt.

$712,654$ runden auf Zehntel (2 Nachkommastellen)
Ziffer der Zehntelstelle: 6
Nachfolgende Ziffer: $5 \Rightarrow$ aufrunden $6 + 1$
Gerundete Zahl: $712,7$
$712,654$ runden auf Hunderter
Ziffer der Hunderterstelle: 7
Nachfolgende Ziffer: $1 \Rightarrow$ abrunden 700
Gerundete Zahl: 700
$712,9996$ runden auf Tausendstel (3 Nachkommastellen)
Ziffer der Tausendstelstelle: 9
Nachfolgende Ziffer: $6 \Rightarrow$ aufrunden $712,999 + 0,001$
Gerundete Zahl: $713,000$

Interaktive Inhalte: Rechenblock -

1.1.13 Potenzen

Definition

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{Faktoren}}$
a = Basis n = Exponent
$a^0 = 1 \quad a^1 = a$
Basis: 10
$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10$
Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)
$e^0 = 1 \quad e^1 = e$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$
$4^0 = 1$
$x^0 = 1$
$4^1 = 4$
$x^1 = x$

Potenzen multiplizieren

gleiche Basis - Exponenten addieren
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$
$e^m \cdot e^n = e^{m+n}$

$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$
$e^3 \cdot e^{-5} = e^{3+(-5)} = e^{-2}$

Potenzen dividieren

leiche Basis - Exponenten subtrahieren
$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$10^m : 10^n = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$
$e^m : e^n = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$

$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$
$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$
$\frac{e^5}{e^{-3}} = e^{5-(-3)} = e^8$

Potenz ausklammern

gleicher Exponenten - Exponent ausklammern
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$
$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$

Potenz in der Potenz

Exponenten multiplizieren
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$
$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$

$\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
$\left(x^2\right)^3 = x^6$
$\left(x^2 \cdot 4\right)^2 = x^4 \cdot 4^2$
$(e^x)^2 = e^{2x}$

Potenzen mit negativem Exponenten

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$
$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$

$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$
$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad x^{-3} \cdot y^{-2} = \frac{1}{x^3 y^2}$

Potenz - Wurzel

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a > 0$
$10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$
$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$

Potenz mit rationalen Exponenten

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a > 0$
$10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$
$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$

$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

Potenzen mit rationalen (negativ) Exponenten

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad a > 0$
$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}}$
$e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e^m}}$

$2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.1.14 Wurzeln

Wurzel - Potenz

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
n - Wurzelexponent a - Radikand
Quadratwurzel: $\sqrt{a}$
Kubikwurzel: $\sqrt[3]{a}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{4}} = 4^{-\frac{1}{2}}$

Wurzeln multiplizieren

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

Wurzeln dividieren

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$
gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Wurzel in der Wurzel

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

Nenner rational machen

Wurzel (irrationale Zahl) aus dem Nenner entfernen
Erweitern des Bruchs mit der Wurzel
$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$
$\frac{a}{b\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b\sqrt{c+d}\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(\sqrt{c+d})^2} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(c+d)}$

Erweitern mit der 3. Binomischen Formel
$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel
$\frac{3}{5\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{30}$
$\frac{3}{5\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(\sqrt{x+2})^2} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(x+2)}$
Erweitern zur 3. Binomischen Formel
$\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23}$
$\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.1.15 Logarithmen

Definition

$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a$
b = Basis a = Numerus
Basis: 10
$log_{10}x = lgx$
$10^{lgx} = x$
$lg10^x = x$
Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)
$log_e x = \ln x$
$e^{\ln x} = x$
$\ln e^x = x$

$3 = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
$log_e 3 = \ln 3$
$e^{\ln 3} = 3$
$\ln e^3 = 3$
$log_{10}2 = lg2$
$10^{lg3} = 3$
$lg10^3 = 3$

Logarithmen addieren

$\log_c a + \log_c b = \log_c(a \cdot b)$
$\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$
$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

$log_2 4 + log_2 8 = log_2(4 \cdot 8) = log_2 32$
$log_3 x + log_3 y = log_3(x \cdot y)$

Logarithmen subtrahieren

$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$
$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$
$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

$\log_3 5 - \log_3 7 = \log_3 \frac{5}{7}$
$\ln 5 - \ln 7 = \ln \frac{5}{7}$

Logarithmus von der Potenz

$log_c a^n = n \log_c a$
$log_a a^n = n \log_a a = n$
$lg 10^n = n$
$ln e^n = n$

$log_3 5^2 = 2 \log_3 5$

Basisumrechnung von Logarithmen

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$

$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0,68$

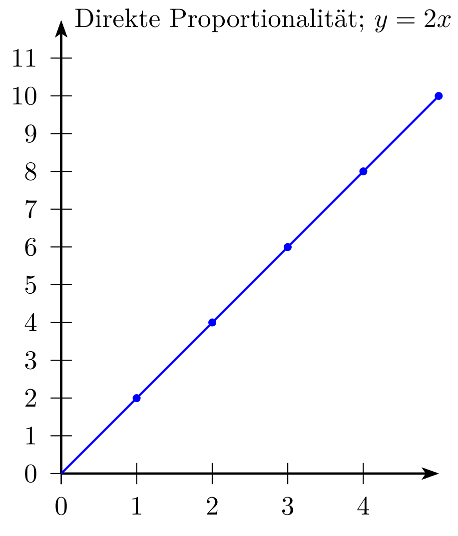
Logarithmus von der Wurzel

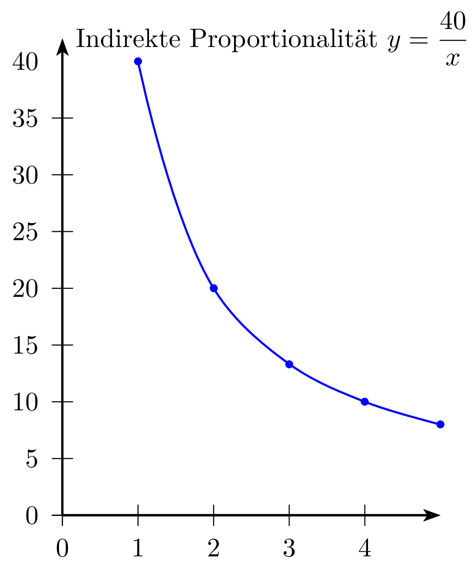
$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$

$\log_4 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \log_4 3$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.1.16 Proportionalität





Direkte Proportionalität

y ist ein vielfaches von x

$y = m \cdot x$

Proportionalitätsfaktor: m

y ist direkt proportional zu x: $y \sim x$

Direkte Proportionalität = quotientengleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4}..$

Funktionsgleichungen:

$y = m \cdot x \qquad x = \frac{y}{m} \qquad m = \frac{y}{x}$

Graph: Urspungsgerade

Ein Tafel Schokolade kostet 2,- Euro.
Zwei Tafeln Schokolade kosten 4,- Euro.
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis der Tafeln
m= Preis einer Tafel
$y = 2 \cdot x$
Wieviel kosten 5 Tafeln ?
$y = 2 \cdot 5 = 10$
Wieviel Tafeln bekommt man für 12,-Euro ?
$x = \frac{12}{2} = 6$
Tabelle:

Anzahl	1	2	3	4	5
Preis	2	4	6	8	10

Direkte Proportionalität = quotientengleich
$m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$
Funktionsgleichung:$y = 2 \cdot x$

Indirekte Proportionalität

y mal x ist konstant

$k = y \cdot x$

y ist indirekt proportional zu x: $y \sim \frac{1}{x}$

Indirekte Proportionalität = produktgleich

Tablelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$k = y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 = y_3 \cdot x_3 = y_4 \cdot x_4..$

Funktionsgleichungen:

$y = \frac{k}{x} \qquad x = \frac{k}{y} \qquad k = y \cdot x$

Graph: Hyperbel

10 Arbeiter benötigen 4 Tage
Wie lange brauchen 20 Arbeiter?
x= Arbeiter
y= Tage
k= Anzahl der Tage bei einem Arbeiter
$k = y \cdot x$
$k = 10 \cdot 4 = 40$
$y = \frac{40}{20} = 2$
Tabelle:

Arbeiter	1	2	3	4	5
Tage	40	20	$13\frac{1}{3}$	10	8

Indirekte Proportionalität = produktgleich
$k = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 20 = 3 \cdot 13\frac{1}{3} = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40$
Funktionsgleichung:$y = \frac{40}{x}$

Dreisatz - Verhältnisgleichung

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \qquad y_1 : x_1 = y_2 : x_2$

$y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$

$y_1 = \frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} \qquad y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$

$x_1 = \frac{x_2 \cdot y_1}{y_2} \qquad x_2 = \frac{x_1 \cdot y_2}{y_1}$

7 Tafel Schokolade kosten 14,- Euro.
Wieviel kosten 5 Tafeln ?
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis der Tafeln
$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
$\frac{14}{7} = \frac{y_2}{5}$
$y_2 = \frac{14 \cdot 5}{7} = 10$

1.2 Terme

1.2.1 Grundlagen

Definition

Terme sind sinnvolle Verknüpfungen (+,-,·,/) von Koeffizienten (Zahlen) und Variablen (Buchstaben: x,y,z,a..).
Eine Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl.
Physikalische und geometrische Formeln sind Terme.
Terme können mit Hilfe des Kommutativgesetzes, Assoziativgesetzes und Distributivgesetzes umgeformt werden.

- konstanter Term 2
- linearer Term $5x$
- quadratischer Term $6x^2$
- weitere Terme

$3 \cdot x - 4$	$2yx - 4y$
$3a - 2b$	$3zx - 2xu$
$x^2 - 3x^2 - x^2$	$yx^2 - 3zx^2 - ux^2$
$5x^2y - 7x^2$	$5e^2y - 2e^3$
$V = l \cdot b \cdot h$	$\rho = \frac{m}{V}$

- keine Terme

$4 + *4 \quad /4, -@$

Schreibweisen

• Man darf das Malzeichen vor der Variablen und vor der Klammer weglassen.
$a \cdot x = ax$
$a \cdot (x + b) = a(x + b)$
• Den Faktor 1 vor einer Variablen kann man weglassen.
$1 \cdot x = 1x = x$
• Zahlen schreibt man vor die Variable
$x \cdot a = ax$

$3 \cdot x = 3x$
$2 \cdot y \cdot 3 = 6y$
$a \cdot x = ax$
$3 \cdot (x - 2) = 3(x - 2)$
$x \cdot y \cdot 5 = 5xy$

Termwert - Termname

Jedem Term kann man einen Namen zuweisen. In Klammern kann man die Variablen des Terms angeben.
Name(Variable 1, Variable 2...)=Term
Ersetzt man die Variablen eines Terms durch Zahlen, berechnet man den Wert des Terms.

Umfang des Rechtecks:
$U(a; b) = 2a + 2b$ oder $U = 2a + 2b$
Name des Terms: U Variable: a,b Term:2a+2b
Berechnen der Termwerts:$a = 5 \quad b = 6$
$U(5; 6) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$ oder $U = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$
$U(5; 6) = 22$ oder $U = 22$
Termwert:22
Linearer Term (Funktion)
$f(x) = 2x + 3$ oder $y = 2x + 3$
Name des Terms: f oder y Variable:x Term:2x+3
Berechnen der Termwerts:$x = 5$
$f(5) = 2 \cdot 5 + 3$ oder $y = 2 \cdot 5 + 3$
$f(5) = 13$ oder $y = 13$
Termwert:13

1.2.2 Umformung von Termen

Addieren und Subtrahieren von Termen

Zwei Terme sind gleichartig, wenn sie aus den gleichen Variablen (Klammerausdrücke) mit den jeweiligen gleichen Exponenten bestehen. Gleichartige Terme kann man durch addieren (subtrahieren) der Koeffizienten zusammenfassen.

Gleichartige Terme $2x$ und $3x$
$2x + 3x = 5x$
Gleichartige Terme $-2x$ und $-3x$
Gleichartige Terme $6y$ und $-5y$
$-2x + 6y - 5y - 3x = -5x + y$
$x^3 + 4x^3 = 5x^3$
$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$
$5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$
$2xy + 3xy + 4z + 5z = 5xy + 9z$
$3e^x - 2e^x = e^x$
$(x^2 - 5x - 27) - (x + 3) =$
$x^2 - 5x - 27 - x - 3 = x^2 - 6x - 30$
Nicht gleichartige Terme kann man nicht zusammenfassen.
$2x + 3y + 3 =$
$2x^2 + 3x + 2 =$
$x^3 + 5x^4 =$
$3e^{2x} - 2e^x =$

Multiplizieren und Dividieren von Termen

Die Zahlen multiplizieren (dividieren) und gleiche Variablen zusammenfassen (Potenzgesetze) .

$2x \cdot 3x = 6x^2$
$2x \cdot 3x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$
$\cdot x^2 = 6 \cdot x^3$
$\frac{9x}{3x} = 3$

$\frac{12x}{3x^2} = \frac{4}{x}$

Addieren und Subtrahieren von Summentermen

- Vorzeichen vor Summenterm

$+(a + b) = a + b \qquad +(a - b) = a - b$
$-(a + b) = -a - b \qquad -(a - b) = -a + b$

- Summenterm und Summenterm

$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$
$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$
$(a - b) - (c - d) = a - b - c + d$

$(2x + 1) + (x + 3) = 2x + 1 + x - 3 = 3x + 4$
$(2x + 1) + (x - 3) = 2x + 1 + x - 3 = 3x - 2$
$(2x + 1) - (x + 3) = 2x + 1 - x - 3 = x - 2$
$-(2x + 1) + (x + 3) = -2x - 1 + x + 3 = -x + 2$

Multiplizieren von Summentermen - Ausmultiplizieren

Ein Produkt in eine Summe(Differenz) in umwandeln.
Jedes Glied mit jedem multiplizieren.

- Faktor mal Summenterm

$c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot c = ac + bc$

- Summenterm mal Summenterm

$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$
$(a + b) \cdot (c + d + e) = ac + ad + ad + bc + bd + de$

- 3 Faktoren

$c \cdot (a + b) \cdot (d + e) = (ac + bc) \cdot (d + e) =$
$acd + ace + bcd + bce$
$(a + b) \cdot (c + d) \cdot (e + f) = (ac + ad + bc + bd) \cdot (e + f) =$
$ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$

$(2x + 1) \cdot (x - 3) =$
$2x \cdot x + 2x \cdot (-3) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-3) =$
$2x^2 + (-6x) + x + (-3) = 2x^2 - 5x - 3$
$(x^2 - 5x - 27) \cdot (x + 3) =$
$x^2 \cdot x + x^2 \cdot 3 + (-5x) \cdot x + (-5x) \cdot 3 + (-27) \cdot x + (-27) \cdot 3 =$
$x^3 + 3x^2 + (-5x^2) + (-15x) + (-27x) + (-81) =$
$x^3 - 2x^2 - 42x - 81$
$(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 5) =$
$(x^2 - x - 6) \cdot (x - 5) =$
$x^3 - 6x^2 - x + 30$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.2.3 Binomische Formel

1. Binomische Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$
$(-a-b)^2 = (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2$

$(x+5)^2 = x^2 + 10 \cdot x + 25$
$(x+9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$
$(-x-9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$
$(2 \cdot x + 5)^2 = 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 25$
$(6 \cdot x + 5)^2 = 36 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 25$
$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
$(x \cdot z + y)^2 = x^2 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$

2. Binomische Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2$
$(-a+b)^2 = (-1)^2(a-b)^2 = (a-b)^2$

$(x-5)^2 = x^2 - 10 \cdot x + 25$
$(x-9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$
$(-x+9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$
$(2 \cdot x - 5)^2 = 4 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 25$
$(6 \cdot x - 5)^2 = 36 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 25$
$(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$
$(x \cdot z - y)^2 = x^2 \cdot z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$

3. Binomische Formel

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$

$(x+5) \cdot (x-5) = x^2 - 25$
$(x+9) \cdot (x-9) = x^2 - 81$
$(3 \cdot x + 5) \cdot (3 \cdot x - 5) = 9 \cdot x^2 - 25$
$(7 \cdot x + 9) \cdot (7 \cdot x - 9) = 49 \cdot x^2 - 81$
$(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$

Binomische Formel in der 3. Potenz

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(1x+2)^3 = 1^3x^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$
$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$(2x + (-3))^3 =$
$2^3x^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot x \cdot (-3)^2 + (-3)^3$
$(2x-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Binomische Formel in der 4. Potenz

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(1x+2)^4 =$
$1^4x^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$
$(x+2)^3 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

$(-2x + (-3))^4 =$
$(-2)^4 x^4 + 4 \cdot (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (-3) + 6 \cdot (-2)^2 \cdot x^2 \cdot (-3)^2 +$
$4 \cdot (-2) \cdot x \cdot (-3)^3 + (-3)^4$
$(-2x-3)^3 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

Binomische Formel mit höheren Potenzen

$(a+b)^n = k_o a^n b^0 + k_1 a^{n-1} b^1 + k_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + k_n a^0 b^n$

Die Summe der Exponeneten ist n.

n+0=n   n-1+1=n   n-2+2=n ...

Koeffizienten(k_0, k_1..) übers Pascal'sche Dreieck

$(a+b)^0$						1					
$(a+b)^1$					1		1				
$(a+b)^2$				1		2		1			
$(a+b)^3$			1		3		3		1		
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1

..

oder über den binomischen Satz:

$(a+b)^n =$

$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \text{ über } k$$

$displaystyle (a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$

$n = 2 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 1$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$n = 3 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 3 \quad k_2 = 3 \quad k_2 = 1$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1b^3$

$n = 4 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 4 \quad k_2 = 6 \quad k_3 = 4 \quad k_4 = 1$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Interaktive Inhalte: $(a+b)^2$ - $(a-b)^2$ - $(a+b)\cdot(a-b)$ - $(ax+b)^3$ - $(ax+b)^4$ -

1.2.4 Faktorisieren - Ausklammern

Eine Summe(Differenz) in ein Produkt umwandeln.

- Ausklammern eines Faktors

$ac + bc = c \cdot (a+b)$

- Doppeltes Ausklammern

$ac + ad + bc + bd = a \cdot (c+d) + b(c+d) =$

$(a+b) \cdot (c+d)$

- Binomischen Formeln

$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$

$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

$2x^2 + 6x = 2x(x+3)$

Binomischen Formeln

$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

$x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$

$4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$

$36 \cdot x^2 - 60x + 25 = (6x-5)^2$

$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

1.2.5 Quadratische Ergänzung

Maximalen oder minimalen Termwert bestimmen.
$T(x) = ax^2 + bx + c$
$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$
$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$
$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$
$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$
$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$
oder
$T(x) = ax^2 + bx + c$
$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$
$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$
$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$
$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + a \cdot \frac{c}{a}$
$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$
$a < 0$
Maximaler Termwert $= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ für x$= -\frac{b}{2 \cdot a}$
$a > 0$
Minimaler Termwert $= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ für x$= -\frac{b}{2 \cdot a}$

quadratische Ergänzung
$y = x^2 - 6x + 2$
$y = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 3^2 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 9 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 7$
Minimaler Termwert $= -7$ für x $= 3$
$y = 2x^2 + 8x + 2$
$y = 2(x^2 + 4x + 1)$
$y = 2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1)$
$y = 2[(x + 2)^2 - 2^2 + 1]$
$y = 2[(x + 2)^2 - 4 + 1]$
$y = 2[(x + 2)^2 - 3]$
$y = 2(x + 2)^2 - 6$
Minimaler Termwert $= -6$ für x $= -2$
$y = -4x^2 + 8x + 4$
$y = -4(x^2 - 2x) + 4$
$y = -4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 4$
$y = -4[(x - 1)^2 - 1^2] + 4$
$y = -4[(x - 1)^2 - 1] + 4$
$y = -4(x - 1)^2 + 4 + 4$
$y = -4(x - 1)^2 + 8$
$Scheitel(1/8)$Maximaler Termwert $= 8$ für x $= 1$

1.2.6 Bruchterme

Definition und Definitionsbereich

Bei einem Bruchterm ist im Nenner eine Variable.
$\frac{Z(x)}{N(x)}$
Die Nullstellen des Nenners müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.
Nullstellen des Nenners bestimmen: $N(x) = 0$
Nullstellen aus den Definitionsbereich ausschließen:
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2....\}$

$\frac{2}{x}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\frac{2}{x-3}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$\frac{2x+3}{x(x-3)}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$
$\frac{3}{x^2-9}$ $\quad x^2 - 9 = 0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}\, setminus\, \{-3; 3\}$

Erweitern von Bruchtermen

Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multiplizieren
$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot c(x)}$

$$\frac{x+3}{x-4} = \frac{(x+3) \cdot 2x}{(x-4) \cdot 2x} = \frac{2x^2 + 6x}{2x^2 - 8x}$$

Kürzen von Bruchtermen

Zähler und Nenner faktorisieren - gleiche Faktoren kürzen
$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) : c(x)}{b(x) : c(x)}$

$$\frac{12x^2 + 4}{4x^2 - 2x} = \frac{4x(3x+1)}{2x(2x-1)} = \frac{2(3x+1)}{2x-1}$$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Bruchterme

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$$\frac{a(x)}{c(x)}+\frac{b(x)}{c(x)}=\frac{a(x)+b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{a(x)}{c(x)}-\frac{b(x)}{c(x)}=\frac{a(x)-b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{2}{3x}+\frac{4}{3x}=\frac{2+4}{3x}=\frac{6}{3x}=\frac{2}{x}$$

$$\frac{5x}{7x-2}-\frac{3}{7x-2}=\frac{5x-3}{7x-2}$$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Bruchterme

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

$$\frac{a(x)}{b(x)}+\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot d(x)}+\frac{c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)+c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{a(x)}{b(x)}-\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot d(x)}-\frac{c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)}=\frac{a(x)-b(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{2}{5x}+\frac{3}{x+4}=\frac{2\cdot(x+4)}{5x(x+4)}+\frac{3\cdot 5x}{5x(x+4)}=\frac{2\cdot(x+4)+3\cdot 5x}{5x(x+4)}$$

$$=\frac{2x+8+15x}{5x(x+4)}=\frac{17x+8}{5x(x+4)}$$

Multiplikation von Bruchtermen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$$\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)\cdot c(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{3x}{x+4}\cdot\frac{5}{6x}=\frac{3x\cdot 5}{(x+4)\cdot 6x}=\frac{15x}{6x\cdot(x+4)}$$

Division von Bruchtermen

Mit dem Kehrwert des Bruchterms multiplizieren

Bruchterm durch Bruchterm

$$\frac{a(x)}{b(x)}:\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot c(x)}$$

Bruch durch Term

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{e(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}:e(x)=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{1}{e(x)}=\frac{a(x)}{b(x)\cdot e(x)}$$

Term durch Bruchterm

$$\frac{e(x)}{\frac{c(x)}{d(x)}}=e(x):\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{e(x)}{1}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{e(x)\cdot d(x)}{c(x)}$$

Doppelbruch

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{\frac{c(x)}{d(x)}}=\frac{a(x)}{b(x)}:\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot c(x)}$$

$$\frac{3}{4x}:\frac{5}{6x}=\frac{3}{4x}\cdot\frac{6x}{5}=\frac{3\cdot 6x}{4x\cdot 5}=\frac{18x}{20x}=\frac{9}{10}$$

$$4x:\frac{5}{6x}=4x\cdot\frac{6x}{5}=\frac{4x\cdot 6x}{5}=\frac{24x^2}{5}$$

$$\frac{3}{4x}:5x=\frac{3}{4x}\cdot\frac{1}{5x}=\frac{3}{4x\cdot 5x}=\frac{3}{20x^2}$$

$$\frac{\frac{3}{4x}}{\frac{5}{6x}}=\frac{3}{4x}:\frac{5}{6x}==\frac{3}{4x}\cdot\frac{6x}{5}=\frac{3\cdot 6x}{4x\cdot 5}=\frac{18x}{20x}=\frac{9}{10}$$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.2.7 Polynomdivision

Die Polynomdivision funktioniert ähnlinch wie die schriftliche Division.

• Voraussetzung: Zählergrad≧Nennergrad

• höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen

• Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen

• höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen

usw.

• Wiederholen bis Zählergrad < Nennergrad

$$\frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$$

höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners te

$\frac{3x^3}{x}=3x^2$

$(3x^3 \quad -10x^2 \quad +7x \quad -12 \quad):(x-3)=3x^2$

•Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen

$(x-3)3x^2=3x^3-9x^2$

$$\begin{array}{llll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 \quad):(x-3)=3x^2 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12
\end{array}$$

• höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Ne teilen

$\frac{-x^2}{x}=-x$

usw...

$$\begin{array}{llll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 \quad):(x-3)=3x^2-x+4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 \\
 & -(-x^2 & +3x) & \\
\hline
 & & 4x & -12 \\
 & & -(4x & -12) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

•Polynomdivision mit Rest

$$\begin{array}{lll}
(x^2 & -5x & -27 \quad):(x+3)=x-8+\frac{-3}{x+3} \\
-(x^2 & +3x) & \\
\hline
 & -8x & -27 \\
 & -(-8x & -24) \\
\hline
 & & -3
\end{array}$$

•Polynomdivision mit fehlenden Potenzen beim Zähler

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & & & +8 \quad):(x-2)=x^2+2x+4 \\
-(x^3 & -2x^2) & & \\
\hline
 & 2x^2 & & +8 \\
 & -(2x^2 & -4x) & \\
\hline
 & & 4x & +8 \\
 & & -(4x & -8) \\
\hline
 & & & 16
\end{array}$$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.3 Gleichungen

1.3.1 Grundlagen

Definition

Termwert der linken Seite $T_1(x)$ ist gleich dem Termwert der rechten Seite $T_2(x)$.

$$T_1(x) = T_2(x)$$

$T_1(x) = 2 \cdot (x+3) \qquad T_2(x) = 5x$
$T_1(x) = T_2(x)$
$2 \cdot (x+3) = 5x$
$2x + 6 = 5x$
$x = 2$

Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht.
Äquivalenzumformungen von Gleichungen
- Vertauschen der beiden Seiten
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten
- Division mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Quadrieren (Potenzieren mit einem geraden Exponenten) ist keine Äquivalenzumformung. Der berechnete Wert, muß durch das Einsetzen in die Ursprungsgleichung überprüft werden.

Vertauschen der beiden Seiten
$x - 2 = 8 \qquad 8 = x - 2$
Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten
$x - 2 = 8 \qquad / + 2$
$x - 2 + 2 = 8 + 2$
$x = 10$
Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
$3x - 2 = 2x + 3 \qquad / - 2x$
$3x - 2x - 2 = 2x - 2x + 3$
$x - 2 = 3$
Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten
$\frac{2}{x-3} = 5 \qquad / \cdot (x-3)$
$\frac{2 \cdot (x-3)}{x-3} = 5 \cdot (x-3)$
$2 = 5(x-3)$
Division durch mit dem gleichen Term auf beiden Seiten
$4x = 8 \qquad / : 4$
$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$
$x = 2$

Quadrieren

$\sqrt{x} = -4$	$\sqrt{x} = 4$
$\sqrt{x}^2 = (-4)^2$	$\sqrt{x}^2 = 4^2$
$x = 16$	$x = 16$
$\sqrt{x} = -4$	$\sqrt{x} = 4$
$\sqrt{16} \neq -4$	$\sqrt{16} = 4$
keine Lösung	Lösung

1.3.2 Lineare Gleichung

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die eine Seite und alle Terme ohne Variable auf die andere Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

$2\frac{1}{2}x + 5 = 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 = 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4$
Äquivalenzumformung:
$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$2\frac{1}{2}x - 2x = 4 - 5$
durch die Zahl vor der Variablen dividieren
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
$x = -2$

$a \cdot x = b$

$$a \cdot x = b \qquad / : a$$
$$x = \frac{b}{a}$$

$5 \cdot x = 45 \qquad / : 5$
$x = \frac{45}{5}$
$x = 9$

$-2 \cdot x = -6 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{-6}{-2}$
$x = 3$

$x + a = b$

$x + a = b \quad / - a$
$x = b - a$

$x + 2 = 5 \quad / - 2$
$x = 5 - 2$
$x = 3$

$x + 5 = -7 \quad / - 5$
$x = -7 - 5$
$x = -12$

$a \cdot x + b = c$

$a \cdot x + b = c \quad / - b$
$a \cdot x = c - b \quad / : a$
$x = \frac{c - b}{a}$

$5 \cdot x - 4 = 6 \quad / + 4$
$5 \cdot x = 10 \quad / : 5$
$x = \frac{10}{5}$
$x = 2$

$-2 \cdot x + 4 = -6 \quad / - 4$
$-2 \cdot x = -10 \quad / : (-2)$
$x = \frac{-10}{-2}$
$x = 5$

$\frac{x}{a} = b$

$\frac{x}{a} = b \quad / \cdot a$
$x = b \cdot a$

$\frac{x}{2} = 5 \quad / \cdot 2$
$x = 5 \cdot 2$
$x = 10$

$\frac{x}{5} = -7 \quad / \cdot 5$
$x = -7 \cdot 5$
$x = -35$

$a - x = b$

$a - x = b \quad / - a$
$-x = b - a \quad / : (-1)$
$x = a - b$

$2 - x = 5 \quad / - 2$
$-x = 5 - 2$
$-x = 3 / : (-1)$
$x = -3$

$x - 5 = -7 \quad / + 5$
$x = -7 + 5$
$x = -2$

$x - a = b$

$x - a = b \quad / + a$
$x = b + a$

$x - 2 = 5 \quad / + 2$
$x = 5 + 2$
$x = 7$

$x - 5 = -7 \quad / + 5$
$x = -7 + 5$
$x = -2$

$ax + b = cx + d \quad / - cx$
$ax - cx + b = d \quad / - b$
$(a - c)x = d - b \quad / : (a - c)$
$a - c \neq 0$
$x = \frac{d-b}{a-c}$

$2x + 4 = 6x + 7 \quad / - 6x$
$-4x + 4 = 7 \quad / - 4$
$-4x = 3 \quad / : (-4)$
$x = -\frac{3}{4}$

Interaktive Inhalte: $a \cdot x + b = c$ - $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ - $a \cdot x + b = 0$ - $a \cdot x = d$ -

1.3.3 Quadratische Gleichung

Umformen: $ax^2 + c = 0$

$ax^2 + c = 0 \quad / - c$
$ax^2 = -c \quad / : a$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
Diskriminante:
$D = \frac{-c}{a}$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6} = 0 \quad / - \frac{1}{6}$
$-\frac{2}{3}x^2 = -\frac{1}{6} \quad / : (-\frac{2}{3})$
$x^2 = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{2}{3}}$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$
$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

Faktorisieren: $ax^2 + bx = 0$

$ax^2 + bx = 0$
$x(ax + b) = 0$
$x_1 = 0 \qquad \vee \qquad x_2 = \dfrac{-b}{a}$

$-2x^2 - 8x = 0$
$x(-2x - 8) = 0$
$x_1 = 0$
$-2x - 8 = 0 \quad / + 8$
$-2x = 8 \quad / : (-2)$
$x = \dfrac{8}{-2}$
$x_2 = -4$

$x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x_1 = 0$
$x - 1 = 0 \quad / + 1$
$x = 1$
$x_2 = 1$

Lösungsformel (Mitternachtsformel): $ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
Diskriminante:
$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$x^2 + 3x - 10 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2}$
$x_1 = \dfrac{-3 + 7}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-3 - 7}{2}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$

p-q Formel: $x^2 + px + q = 0$

$x^2 + px + q = 0$
$x_{1/2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$
Diskriminante:
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$x^2 + 3x - 10 = 0$
$x_{1/2} = -\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - (-10)}$
$x_{1/2} = -1\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{12\dfrac{1}{4}}$
$x_{1/2} = -1\dfrac{1}{2} \pm 3\dfrac{1}{2}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$

Satz von Vieta: $x^2 + px + q = 0$

$x^2 + px + q = 0$
x_1, x_2 sind die Lösungen der Gleichung
$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$
$x^2 - x_2 \cdot x - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$
$x^2 - (x_1 + x_1)x + x_1 \cdot x_2 = 0$
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

$x^2 + 3x - 10 = 0$
$p = 3 \quad q = -10$
$x_1 + x_2 = -3$
$x_1 \cdot x_2 = 10$
$2 - 5 = -3$
$2 \cdot (-5) = -10$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$
$(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$

Interaktive Inhalte: $ax^2 + bx + c = 0$ -

1.3.4 Kubische Gleichungen

Umformen: $ax^3 + b = 0$

$ax^3 + b = 0$
$ax^3 + b = 0 \qquad / - b$
$ax^3 = -b \qquad / : a$
$x^3 = \frac{-b}{a}$
$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} > 0 \qquad x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} < 0 \qquad x = -\sqrt[3]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$

$3x^3 + 24 = 0$
$3x^3 + 24 = 0 \qquad / - 24$
$3x^3 = -24 \qquad / : 3$
$x^3 = \frac{-24}{3}$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$

$-3x^3 + 24 = 0$
$-3x^3 + 24 = 0 \qquad / - 24$
$-3x^3 = -24 \qquad / : (-3)$
$x^3 = \frac{-24}{-3}$
$x = \sqrt[3]{8}$
$x = 2$

Faktorisieren: $ax^3 + bx = 0$

$ax^3 + bx = 0$
$x(ax^2 + b) = 0$
$x_1 = 0 \qquad \vee \qquad (ax^2 + b) = 0$

$-9x^3 + 25x = 0$
$x(-9x^2 + 25) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad -9x^2 + 25 = 0$
$-9x^2 + 25 = 0 \qquad / - 25$
$-9x^2 = -25 \qquad / : (-9)$
$x^2 = \frac{-25}{-9}$
$x = \pm\sqrt{2\frac{7}{9}}$
$x_2 = 1\frac{2}{3} \qquad x_3 = -1\frac{2}{3}$

Faktorisieren: $ax^3 + bx^2 = 0$

$ax^3 + bx^2 = 0$
$x^2(ax + b) = 0$
$x_{1/2} = 0 \qquad \vee \qquad (ax + b) = 0$

$-6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 = 0$
$x^2(-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2}) = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = 0 \quad \vee \quad -6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0$
$-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 13\frac{1}{2}$
$-6\frac{3}{4}x = 13\frac{1}{2} \qquad / : \left(-6\frac{3}{4}\right)$
$x = \frac{13\frac{1}{2}}{-6\frac{3}{4}}$
$x_3 = -2$

Polynomdivision

$ax^3 + bx^2 + d = 0$
$ax^3 + cx + d = 0$
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

• Die ganzzahligen Faktoren von d in die Funktion einsetzen. Wird bei einem Faktor der Funktionswert Null, hat man eine Nullstelle x_0 gefunden.

• Wenn x_0 ein Nullstelle von f(x) ist, so ist f(x) durch $(x - x_0)$ ohne Rest teilbar.

• Mit dem Linearfaktor $(x - x_0)$ wird die Polynomdivision durchgeführen.

$(ax^3 + bx^2 + cx + d) : (x - x_0) = fx^2 + dx + e$
$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x - x_0) \cdot (fx^2 + dx + e)$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$d = 4$ Ganzzahlige Faktoren: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$
$f(1) = 0$
Nullstelle gefunden: $x_1 = 1$

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & -4x) & \\
\hline
 & & 4x & -4 \\
 & & -(4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{2}$
$x_2 = \frac{-4 + 0}{2} \qquad x_3 = \frac{-4 - 0}{2}$
$x_2 = -2 \qquad x_3 = -2$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.3.5 Gleichungen höheren Grades

Gerader Exponent: $ax^n + c = 0$

$ax^n + c = 0 \quad / - c$
$ax^n = -c \quad / : a$
$x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{\frac{-c}{a}}$
Diskriminante:
$D = \frac{-c}{a}$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$-2x^4 + 162 = 0 \quad / - 162$
$-2x^4 = -162 \quad / : (-2)$
$x^4 = \frac{-162}{-2}$
$x = \pm \sqrt[4]{81}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

Ungerader Exponent: $ax^n + c = 0$

Umformen:
$ax^n + b = 0$

$ax^n + b = 0 \quad / - b$
$ax^n = -b \quad / : a$
$x^n = \frac{-b}{a}$
$x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} > 0 \qquad x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} < 0 \qquad x = -\sqrt[n]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$

$5x^3 + 320 = 0 \quad / - 320$
$5x^3 = -320 \quad / : 5$
$x^3 = -\frac{320}{5}$
$x = -\sqrt[3]{64}$
$x = -4$

Biquadratische Gleichung

$ax^4 + bx^2 + c = 0$
Substitution: $u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
Quadratische Gleichung: $au^2 + bu + c = 0$
Lösungen: $u_1 \qquad u_2$
Resubstitution: $x^2 = u_1 \qquad x^2 = u_2$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 10u + 9 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$
$$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{64}}{2}$$
$$u_{1/2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$
$$u_1 = \frac{10 + 8}{2} \qquad u_2 = \frac{10 - 8}{2}$$
$u_1 = 9 \qquad u_2 = 1$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_3 = 1 \qquad x_4 = -1$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.3.6 Bruchgleichung

Überkreuzmultiplikation

• Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
•Das Produkt aus dem Zähler des linken Bruchs und dem Nenner des rechten Bruchs ist gleich dem Produkt aus dem Nenner des linken Bruchs und dem Zähler des rechten Bruchs.
• Gleichung lösen
• Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$$\frac{a}{bx + c} = \frac{d}{ex + f} \qquad a \cdot (ex + f) = d \cdot (bx + c)$$

$$\frac{2}{x+4} = \frac{3}{x-1}$$
Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$
Überkreuzmultiplikation$2 \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x - 4)$
$2x - 1 = 3x - 12$
$x = 11$

Mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

• Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
• Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren
• Gleichung lösen
• Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$$\frac{2}{5x} = \frac{1}{x+3}$$
Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$
Hauptnenner:5x(x+3)
$$\frac{2 \cdot 5x(x+3)}{5x} = \frac{1 \cdot 5x(x+3)}{(x+3)}$$
$2 \cdot (x + 3) = 5x$
$2x + 6 = 5x$
$x = 2$

1.3.7 Exponentialgleichungen

$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$

$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$
$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0 \qquad / - f$
$a \cdot b^{(cx+d)} = -f \qquad / : a$
$b^{(cx+d)} = \frac{-f}{a} \qquad / \log_b(...)$
$\frac{-f}{a} > 0 \Rightarrow$
$\log_b\left(b^{(cx+d)}\right) = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right)$
Logarithmengesetz: $log_b b^n = n \log_b b = n$
$(cx+d)\log_b(b) = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right)$
$cx + d = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right) \qquad / - d \qquad / : c$
$x = \frac{\log_b\left(\frac{-f}{a}\right) - d}{c}$
$\frac{-f}{a} \leq 0 \Rightarrow$ keine Lösung

$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0$
$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0 \qquad / - 4$
$-2 \cdot 2^{(2x+3)} = -4 \qquad / : -2$
$2^{(2x+3)} = 2 \qquad / \log_2$
$2x + 3 = \log_2(2) \qquad / - 3 \qquad / : 2$
$x = -1$
Basis: $e = 2,718..$(eulersche Zahl)
$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0$
$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0 \qquad / + 6$
$2 \cdot e^{(3x+4)} = +6 \qquad / : 2$
$e^{(3x+4)} = 3 \qquad / \ln$
$3x + 4 = \ln(3) \qquad / - 4 \qquad / : 3$
$x = -0,967$

Interaktive Inhalte: $ab^{(cx+d)} + f = 0$ - $f(x) = ae^{(cx+d)} + f$ -

1.3.8 Logarithmusgleichungen

$a\log_b(cx+d) + f = 0$

$a\log_b(cx+d) + f = 0$
$a\log_b(cx+d) + f = 0 \qquad / - f$
$a\log_b(cx+d) = -f \qquad / : a$
$\log_b(cx+d) = \frac{-f}{a} \qquad / b$
$b^{(\log_b(cx+d))} = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)}$
$cx + d = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} \qquad / - d \qquad / : c$
$$x = \frac{b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} - d}{c}$$

$2 \cdot log_3(4x+5) - 4 = 0$
$2 \cdot log_3(4x+5) - 4 = 0 \qquad / + 4$
$2 \cdot log_3(4x+5) = +4 \qquad / : 2$
$\log_3(4x+5) = 2 \qquad / 3^{\cdot\cdot}$
$4x + 5 = 3^2 \qquad / - 5 \qquad / : 4$
$$x = \frac{3^2 - 5}{4}$$
Basis: $e = 2,718..$(eulersche Zahl)
$\log_e x = lnx \quad 4 \cdot ln(5x+7) + 8 = 0$
$4 \cdot ln(5x+7) + 8 = 0 \qquad / - 8$
$4 \cdot ln(5x+7) = -8 \qquad / : 4$
$\ln(5x+7) = -2 \qquad / e^{\cdot\cdot}$
$5x + 7 = e^{-2} \qquad / - 7 \qquad / : 5$
$$x = \frac{e^{-2} - 7}{5}$$
$x = -1,37$

$\log_b x = 0$

$\log_b x = 0 \quad / b$
$x = b^0$
$x = 1$
$\lg x = 0 \quad / 10$
$x = 10^0$
$x = 1$
$\ln x = 0 \quad / e$
$x = e^0$
$x = 1$

Interaktive Inhalte: $a\log_b(cx+d) + f = 0$ - $a\ln(cx+d) + f = 0$ -

1.3.9 Betragsgleichung

$|ax+b| = c$

• Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax+b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $ax+b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$|ax+b| = \begin{cases} (ax+b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax+b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$

• 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$
$ax+b = c$
$ax+b = c \quad / -b \quad / : a$
$x = \frac{c-b}{a}$
•1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{c-b}{a}$
• 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$
$-(ax+b) = c \quad / : (-1)$
$ax+b = -c$
$ax+b = -c \quad / -b \quad / : a$
$x = \frac{-c-b}{a}$
• 2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x > \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{-c-b}{a}$
• Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$|2x+3| = 7$
$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$
• 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$
$2x+3 = 7$
$2x+3 = 7 \quad / -3 \quad / : 2$
$x = 2$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = 2$
1. Lösung $x = 2$
• 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$
$-(2x+3) = 7$
$2x+3 = -7 \quad / -3 \quad / : 2$
$x = -5$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = -5$
2. Lösung $x = -5$
Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung
$x = 2 \quad \vee \quad x = -5$

$|2x+3| = -7$
$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$
• 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$
$2x+3 = -7$
$2x+3 = -7 \quad / -3 \quad / : 2$
$x = -5$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = -5$
1. Lösung ist Leeremenge
• 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$
$-(2x+3) = -7$
$2x+3 = +7 \quad / -3 \quad / : 2$
$x = 2$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = 2$
2. Lösung ist Leeremenge
Gesamtlösung ist Leeremenge

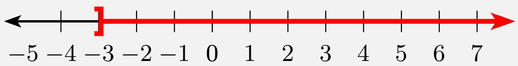
1.4 Ungleichungen

1.4.1 Grundlagen

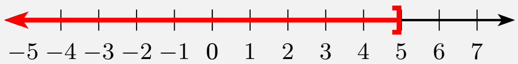
Ungleichheitszeichen

$x < b$	kleiner als	weniger als
$x > b$	größer als	mehr als
$x \leq b$	kleiner oder gleich	höchstens
$x \geq b$	größer oder gleich	mindestens

$x > -3$



$x \leq 5$



Intervalle in der Mengenschreibweise

offenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x < b$	$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert a < x < b\}$
$x < b$	$]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert x < b\}$
$x > a$	$]a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \vert x > a\}$

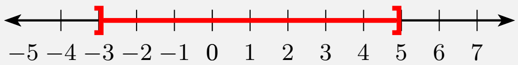
halboffenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x \leq b$	$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert a < x \leq b\}$
$a \leq x < b$	$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x < b\}$
$x \leq b$	$]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert x \leq b\}$
$x \geq a$	$[a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \vert x \geq a\}$

abgeschlossenes Intervall

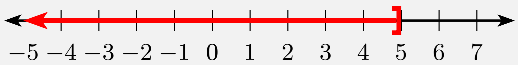
Intervall	Mengenschreibweise
$a \leq x \leq b$	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x \leq b\}$

$]-3; 5] = \{x \in \mathbb{R} \vert -3 < x \leq 5\}$



$-3 \notin]-3; 5]$ $\quad 5 \in]-3; 5]$ $\quad -1 \in]-3; 5]$ $\quad 6 \notin]-3; 5]$

$]-\infty; 5] = \{x \in \mathbb{R} \vert x \leq 5\}$



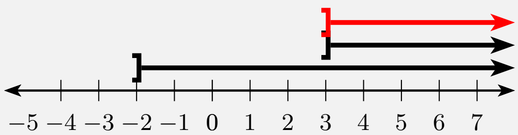
$-123 \in]-\infty; 5]$ $\quad 5 \in]-\infty; 5]$ $\quad 6 \notin]-\infty; 5]$

Schnittmenge ∩ - und zugleich ∧

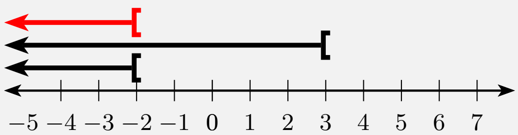
$a < b \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Intervall		Mengen	
$x > a \wedge x > b$	$x > b$	$]a; \infty[\cap]b; \infty[$	$]b; \infty[$
$x < a \wedge x < b$	$x < a$	$]-\infty; a[\cap]-\infty; b[$	$]-\infty; a[$
$x > a \wedge x < b$	$a < x < b$	$]a; \infty[\cap]-\infty; b[$	$]a; b[$
$x < a \wedge x > b$	$\{\}$	$]-\infty; a[\cap]b; \infty[$	$\{\}$

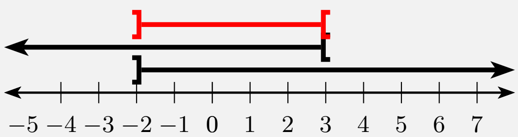
$x > -2 \wedge x > 3 = x > 3 \quad]-2; \infty[\cap]3; \infty[=]3; \infty[$



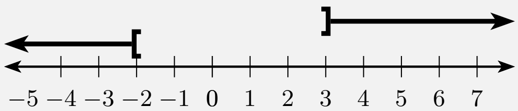
$x < -2 \wedge x < 3 = x < -2 \quad]-\infty; -2[\cap]-\infty; 3[=]-\infty; -2[$



$x > -2 \wedge x < 3 = -2 < x < 3 \quad]-2; \infty[\cap]-\infty; 3[=]-2; 3[$



$x < -2 \wedge x > 3 = \{\} \quad]-\infty; -2[\cap]3; \infty[= \{\}$

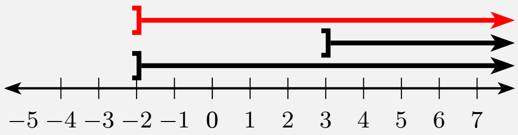


Vereinigungsmenge $\cup$ - oder auch $\vee$

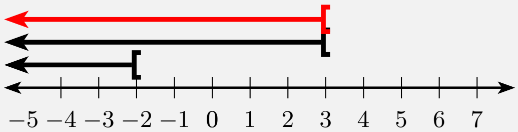
$a < b \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Intervall		Mengen	
$x > a \vee x > b$	$x > a$	$]a; \infty[\cup]b; \infty[$	$]a; \infty[$
$x < a \vee x < b$	$x < b$	$]-\infty; a[\cup]-\infty; b[$	$]-\infty; b[$
$x > a \vee x < b$	$x \in \mathbb{R}$	$]a; \infty[\cup]-\infty; b[$	$\mathbb{R}$
$x < a \vee x > b$		$]-\infty; a[\cup]b; \infty[$	$\mathbb{R} \setminus [a; b]$

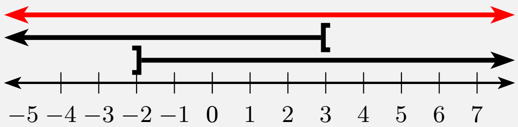
$x > -2 \vee x > 3 = x > -2 \quad]-2; \infty[\cup]3; \infty[=]-2; \infty[$



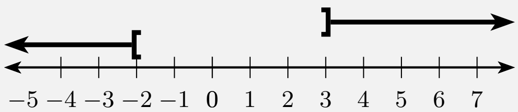
$x < -2 \vee x < 3 = x < 3 \quad]-\infty; -2[\cup]-\infty; 3[=]-\infty; 3[$



$x > -2 \vee x < 3 = x \in \mathbb{R} \quad]-2; \infty[\cup]-\infty; 3[= \mathbb{R}$



$x < -2 \vee x > 3 \quad]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$



1.4.2 Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht.

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

- Vertauschen der beiden Seiten $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Multiplikation mit einer negativen Zahl $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

- Division durch mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Division mit einer negativen Zahl $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

Vertauschen der beiden Seiten

$x - 2 > 8 \qquad 8 < x - 2$

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten

$x - 2 > 8 \qquad / + 2$

$x - 2 + 2 > 8 + 2$

$x > 10$

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten

$3x - 2 \leq 2x + 3 \qquad / - 2x$

$3x - 2x - 2 \leq 2x - 2x + 3$

$x - 2 \leq 3$

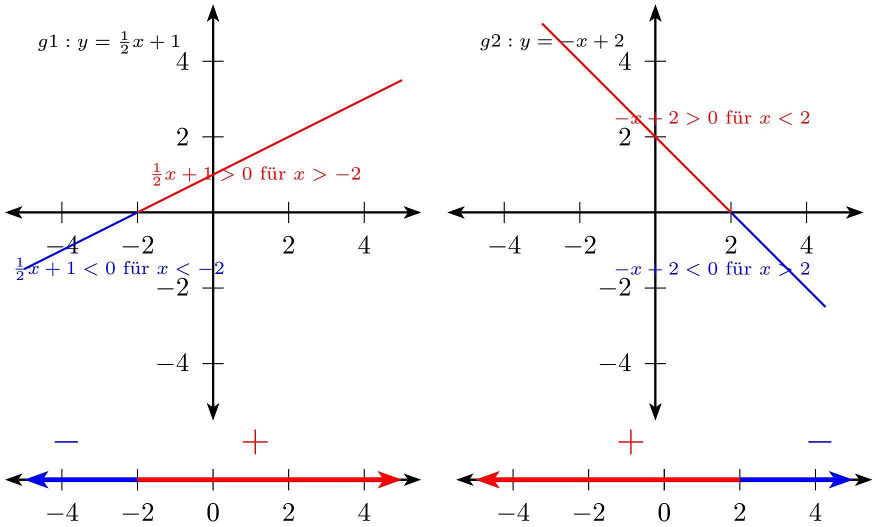
Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$\frac{x}{2} < -4 \qquad / \cdot 2$	$\frac{x}{-2} < -4 \qquad \cdot (-2)$
$\frac{x}{2} \cdot 2 < -4 \cdot 2$	$\frac{x}{-2} \cdot (-2) > -4 \cdot (-2)$
$x < -8$	$x > 8$

Division durch mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$2x > -4 \qquad / : 2$	$\frac{x}{-2} > -4 \qquad / : (-2)$
$\frac{x}{2} \cdot 2 > -4 \cdot 2$	$\frac{x}{-2} \cdot (-2) < -4 : (-2)$
$x > -8$	$x < 8$

1.4.3 Lineare Ungleichung



Algebraische Lösung

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die linke Seite und alle Terme ohne Variable auf die rechte Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

Division oder Multiplikation mit einer negativen Zahl
$\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$
Äquivalenzumformung:
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$2\frac{1}{2}x - 2x \leq 4 - 5$
durch die Zahl vor der Variablen dividieren
$\frac{1}{2}x \leq -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x \leq \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

$-x + 2 > 0$
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x > -2 \qquad / : (-1)$
$x < 2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

Graphische Lösung

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$
- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $y > 0$
- Graph ist unterhalb der x-Achse $y < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$
Äquivalenzumformung
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$y \leq 0$
Term als Funktion schreiben
$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = -2$
Graph zeichnen g_1
$y \leq 0$ der Graph ist unterhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; -2]$

$-x + 2 > 0$
Term als Funktion schreiben
$g_2 : y = -x + 2 \quad y > 0$
Nullstelle berechnen
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = 2$
Graph zeichnen g_2
$y > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x < 2 \qquad \in]-\infty; 2[$

Vorzeichentabelle

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle

Das Vorzeichen einer linearen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

	$x <$	x_1	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$ax + b > 0$		$ax + b < 0$

	$x <$	x_1	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$ax + b < 0$		$ax + b > 0$

$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$y \leq 0 \quad -$ negative Funktionswerte
Term als Funktion schreiben
$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = -2$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = -4$
$g1 : y = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1 = -1$ Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g1 : y = \frac{1}{2} \cdot (0) + 1 = +1$ Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$\frac{1}{2}x + 1 < 0$		$\frac{1}{2}x + 1 > 0$

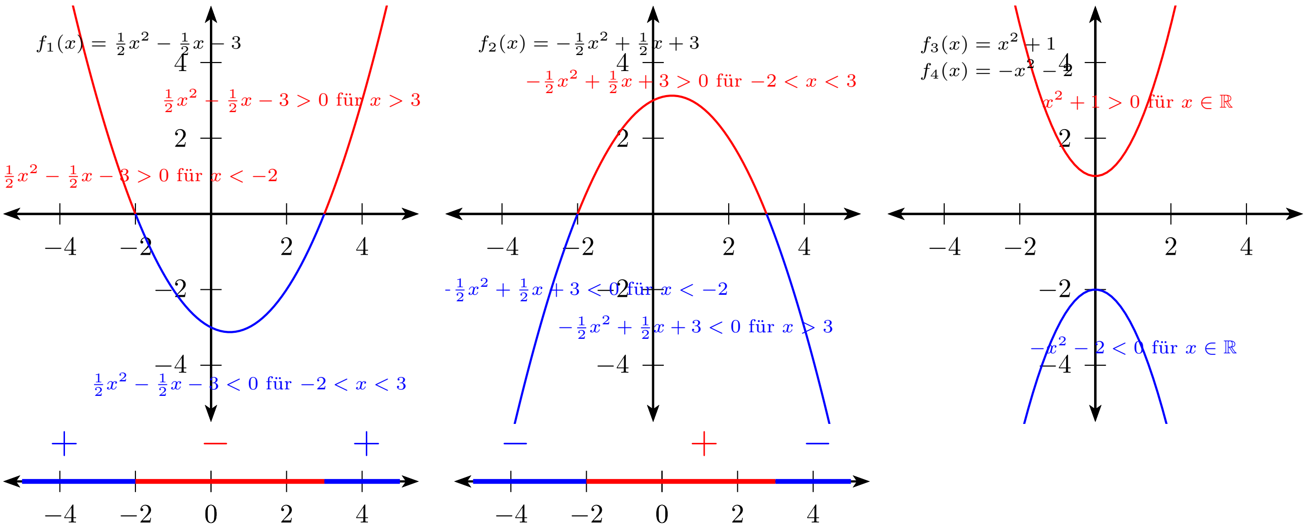
Lösung der Ungleichung: $\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; -2]$

$-x + 2 > 0$
$y > 0 \quad +$positive Funktionswerte
Term als Funktion schreiben
$g_2 : y = -x + 2$
Nullstelle berechnen
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = 2$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g2 : y = -0 + 1 = +1$ Pluszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 2$
$g2 : y = -2 + 1 = -1$ Minuszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$-x + 2 > 0 \quad x < 2$		$-x + 2 < 0 \quad x > 2$

Lösung der Ungleichung: $-x + 2 > 0$
$x < 2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

1.4.4 Quadratische Ungleichung



Algebraische Lösung

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$
- 1. Methode
- Ungleichung nach Null auflösen
- quadratische Ergänzung
- quadratischen Term alleinstellen
- Wurzelziehen und Betrag schreiben
- Betragsungleichung lösen
- 2. Methode
- Ungleichung nach Null auflösen
- Term faktorisieren

$a(x - x_1)(x - x_2)$
- Auspalten in lineare Ungleichungen

1. Fall $\qquad a(x - x_1)(x - x_2) > 0$
$(+ \cdot + = +) \vee (- \cdot - = +)$
$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 > 0) \vee$
$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 < 0)$
2. Fall $\qquad a(x - x_1)(x - x_2) < 0$
$(+ \cdot - = -) \vee (- \cdot + = -)$
$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 < 0) \vee$
$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 > 0)$
- Zusammenfassen der einzelnen Lösungen

1. Methode
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
quadratische Ergänzung
$\frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2}^2 - 6) > 0$
$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6] > 0$
$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}] > 0$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - 3\frac{1}{8} > 0$
quadratischen Term alleinstellen
$(x - \frac{1}{2})^2 > \frac{25}{4}$
Wurzelziehen und Betrag schreiben
$|x - \frac{1}{2}| > \frac{5}{2}$
Betragsungleichung
$x > 3 \quad \vee \quad x < -2$

2. Methode
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
Term faktorisieren
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
$\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3) > 0$
Aufspalten in lineare Ungleichungen
$(\frac{1}{2}(x + 2) > 0 \wedge x - 3 > 0) \vee (\frac{1}{2}(x + 2) < 0 \wedge x - 3 < 0)$
$(x > -2 \wedge x > 3) \vee (x < -2 \wedge x < 3)$
Lösungen zusammenfassen
$x > 3 \vee x < -2$

Graphische Lösung

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $f(x) > 0$
- Graph unterhalb der x-Achse $f(x) < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
$f_1(x) > 0$
Term als Funktion schreiben
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
Graph zeichnen $f_1(x)$
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x > 3 \vee x < -2$

Vorzeichentabelle

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle

Das Vorzeichen einer quadratischen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
$f_1(x) > 0$
Term als Funktion schreiben
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$
Wert kleiner als die Nullstelle $x_1 = -2$ wählen $\quad x = -4$
$f_1(-4) = +7$ Pluszeichen eintragen
Wert zwischen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ wählen $\quad x = 0$
$f_1(0) = -3$ Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle $x_2 = 3$ wählen $\quad x = 4$
$f_1(4) = +3$ Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
x-Bereiche aus der Vorzeichentabelle ablesen
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]3; \infty[$

1.4.5 Betragsungleichung

$|ax + b| > c$

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $\quad ax + b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $\quad ax+b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$$|ax + b| = \begin{cases} (ax + b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax + b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$ax + b > c$
$ax + b > c \quad / - b \quad / : a \qquad (a > 0)$
$x > \frac{c-b}{a}$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x > \frac{c-b}{a}$

- 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$-(ax + b) > c \quad / : (-1)$
$ax + b < -c$
$ax + b < -c \quad / - b \quad / : a \quad (a > 0)$
$x < \frac{-c-b}{a}$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-b}{a} \wedge x < \frac{-c-b}{a}$

- Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$|2x + 3| > 7$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x + 3 > 7$
$2x + 3 > 7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x > 2$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x > 2$
1. Lösung $x > 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x + 3) > 7$
$2x + 3 < -7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x < -5$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x < -5$
2. Lösung $x < -5$
Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung
$x > 2 \quad \vee \quad x < -5$

$|2x + 3| < 7$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x + 3 < 7$
$2x + 3 < 7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x < 2$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x < 2$
1. Lösung $\frac{-3}{2} \leq x < 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x + 3) < 7$
$2x + 3 > -7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x > -5$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x > -5$
2. Lösung $\; -5 < x < \frac{-3}{2}$
Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung
$-5 < x < 2$

1.5 Lineares Gleichungssystem

1.5.1 Einsetzverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$

$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- Gleichung I oder II nach x oder y auflösen
- Term in die andere Gleichung einsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
I nach x auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \quad / - 5y$
$3x = 19 - 5y \quad / : 3$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
I in II
$7(6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y) + 5y = 31$
$44\frac{1}{3} - 11\frac{2}{3}y + 5y = 31 \quad / - 44\frac{1}{3}$
$-11\frac{2}{3}y + 5y = 31 - 44\frac{1}{3}$
$-6\frac{2}{3}y = -13\frac{1}{3} \quad / : \left(-6\frac{2}{3}\right)$
$y = \frac{-13\frac{1}{3}}{-6\frac{2}{3}}$
$y = 2$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} \cdot 2$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
I nach y auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \quad / - 3x$
$5y = 19 - 3x \quad / : 5$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
I in II
$7x + 5(3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x) = 31$
$19 - 3x + 5x = 31 \quad / - 19$
$-3x + 5x = 31 - 19$
$4x = 12 \quad / : 4$
$x = \frac{12}{4}$
$x = 3$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot 3$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.5.2 Gleichsetzungsverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$

$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- beide Gleichungen nach x oder y auflösen
- Terme gleichsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
I nach y auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \quad / - 3x$
$5y = 19 - 3x \quad / : 5$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
II nach y auflösen
$7x + 5y = 31$
$7x + 5y = 31 \quad / - 7x$
$5y = 31 - 7x \quad / : 5$
$y = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x$
I = II
$3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x \quad / + \frac{3}{5}x$
$3\frac{4}{5} = 6\frac{1}{5} - \frac{4}{5}x \quad / - 6\frac{1}{5}$
$-2\frac{2}{5} = -\frac{4}{5}x \quad / : \left(-\frac{4}{5}\right)$
$x = 3$
x in I
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}3$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
I nach x auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \quad / - 5y$
$3x = 19 - 5y \quad / : 3$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
II nach x auflösen
$7x + 5y = 31$
$7x + 5y = 31 \quad / - 5y$
$7x = 31 - 5y \quad / : 7$
$x = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y$
I = II
$6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y \quad / + 1\frac{2}{3}y$
$6\frac{1}{3} = 4\frac{3}{7} + \frac{20}{21}y \quad / - 4\frac{3}{7}$
$1\frac{19}{21} = \frac{20}{21}y \quad / : \frac{20}{21}$
$y = 2$
y in I
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}2$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.5.3 Additionsverfahren (2)

$I \qquad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$
$II \qquad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- Terme mit x und y müssen untereinander stehen
- Gleichungen multiplizieren, so dass die Variablen beim spaltenweisen addieren herausfallen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 7$
$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-3)$
$I \quad 21x + 35y = 133$
$II \quad -21x - 15y = -93$
I + II
$21x - 21x + 35y - 15y = 133 - 93$
$20y = 40 \quad / : 20$
$y = \frac{40}{20}$
$y = 2$
y in I
$I \qquad 3x + 5 \cdot 2 = 19$
$3x + 10 = 19 \quad / - 10$
$3x = 19 - 10$
$3x = 9 \quad / : 3$
$x = \frac{9}{3}$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 1$
$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-1)$
$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad -7x - 5y = -31$
I + II
$3x - 7x + 5y - 5y = 19 - 31$
$-4x = -12 \quad / : (-4)$
$x = \frac{-12}{-4}$
$x = 3$
x in I
$I \quad 3 \cdot 3 + 5y = 19$
$5y + 9 = 19 \qquad / - 9$
$5y = 19 - 9$
$5y = 10 \qquad / : 5$
$y = \frac{10}{5}$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.5.4 Determinantenverfahren (2)

$I \qquad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$
$II \qquad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1 \cdot b2 - b1 \cdot a2$$
$$D_x = \begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = c1 \cdot b2 - b1 \cdot c2$$
$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} = a1 \cdot c2 - c1 \cdot a2$$

- Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$x = \frac{D_x}{D_h}$
$y = \frac{D_y}{D_h}$

- Keine Lösung $D_h = 0$

$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$

- Unendlich viele Lösungen

$D_h = D_x = D_y = 0$

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
$$D_h = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = -20$$
$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 31 & 5 \end{vmatrix} = 19 \cdot 5 - 5 \cdot 31 = -60$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 7 & 31 \end{vmatrix} = 3 \cdot 31 - 19 \cdot 7 = -40$$
$x = \frac{-60}{-20}$
$x = 3$
$y = \frac{-40}{-20}$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.5.5 Determinantenverfahren (3)

$a1x + b1y + c1z = d1$

$a2x + b2y + c2z = d2$

$a3x + b3y + c3z = d3$

$$D_h = \left|\begin{array}{ccc|cc} a1 & b1 & c1 & a1 & b1 \\ a2 & b2 & c2 & a2 & b2 \\ a3 & b3 & c3 & a3 & b3 \end{array}\right|$$

$D_h = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3$

$-\, c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} d1 & b1 & c1 & d1 & b1 \\ d2 & b2 & c2 & d2 & b2 \\ d3 & b3 & c3 & d3 & b3 \end{array}\right|$$

$D_x = d1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot d3 + c1 \cdot d2 \cdot b3$

$-\, c1 \cdot b2 \cdot d3 - d1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot d2 \cdot c3$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} a1 & d1 & c1 & a1 & d1 \\ a2 & d2 & c2 & a2 & d2 \\ a3 & d3 & c3 & a3 & d3 \end{array}\right|$$

$D_y = a1 \cdot d2 \cdot c3 + d1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot d3$

$-\, c1 \cdot d2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot d3 - d1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} a1 & b1 & d1 & a1 & b1 \\ a2 & b2 & d2 & a2 & b2 \\ a3 & b3 & d3 & a3 & b3 \end{array}\right|$$

$D_z = a1 \cdot b2 \cdot d3 + b1 \cdot d2 \cdot a3 + d1 \cdot a2 \cdot b3$

$-\, d1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot d2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot d3 = 0$

• Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$x = \frac{D_x}{D_h}$

$y = \frac{D_y}{D_h}$

$z = \frac{D_z}{D_h}$

• Keine Lösung $D_h = 0$

$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$ oder $D_z \neq 0$

• Unendlich viele Lösungen

$D_h = D_x = D_y = D_z = 0$

$11x + 13y + 4z = 37$

$12x + 14y + 5z = 40$

$9x + 3y + 3z = 15$

$$D_h = \left|\begin{array}{ccc|cc} 11 & 13 & 4 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 5 & 12 & 14 \\ 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right|$$

$D_h = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3$

$-4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 37 & 13 & 4 & 37 & 13 \\ 40 & 14 & 5 & 40 & 14 \\ 15 & 3 & 3 & 15 & 3 \end{array}\right|$$

$D_x = 37 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 15 + 4 \cdot 40 \cdot 3$

$-4 \cdot 14 \cdot 15 - 37 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 40 \cdot 3 = 54$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 11 & 37 & 4 & 11 & 37 \\ 12 & 40 & 5 & 12 & 40 \\ 9 & 15 & 3 & 9 & 15 \end{array}\right|$$

$D_y = 11 \cdot 40 \cdot 3 + 37 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 15$

$-4 \cdot 40 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 15 - 37 \cdot 12 \cdot 3 = 108$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 11 & 13 & 37 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 40 & 12 & 14 \\ 9 & 3 & 15 & 9 & 3 \end{array}\right|$$

$D_z = 11 \cdot 14 \cdot 15 + 13 \cdot 40 \cdot 9 + 37 \cdot 12 \cdot 3$

$-37 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 40 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 15 = 0$

$x = \frac{54}{54}$

$x = 1$

$y = \frac{108}{54}$

$y = 2$

$z = \frac{0}{54}$

$z = 0$

$L = \{1/2/0\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.6 Lineare Algebra

1.6.1 Matrix

Definition

Eine $m \times n$–*Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ik})$

a_{ik} : Elemente der Matrix

i : Zeilenindex

k : Spaltenindex

• Quadratische Matrix

Die Anzahl der Zeilen ist gleich der Anzahl der Spalten $m = n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

3×3Quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = 3$

$a_{21} = 4 \quad a_{22} = 5 \quad a_{23} = 6$

$a_{31} = 7 \quad a_{32} = 8 \quad a_{33} = 9$

2×3 Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1×3 Zeilenmatrix (Zeilenvektor)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3×1 Spaltenmatrix (Spaltenvektor)

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Besondere Matrizen

• Einheitsmatrix

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Transponierte Matrix

Vertauschenden von Zeilen- und Spaltenindex.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$A = (A^T)^T$

symmetrische Matrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nullmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Addition von Matrizen

Summe der Matrix $A = (a_{ik})$ und der Matrix $B = (b_{ik})$ Die Anzahl der Spalten (i) und der Zeilen(k) der beiden Matrizen müssen gleich sein. $A + B = a_{ik} + b_{ik}$

• Summe 2×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

• Summe 3×3 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + a_{33} \end{bmatrix}$$

Summe zweier 2×3 Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

• Produkt aus der Matrix $A = (a_{ik})$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\lambda A = \lambda a_{ik}$

2×2 Matrix

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

• Produkt aus Matrix $A = (a_{ij})$ und Matrix $B = (b_{jk})$ Anzahl der Zeilen von A muß gleich der Anzahl der Spalten von B sein.

Zeilenelemente von A mal Spaltenelemente von B.

• Produkt zweier 2×2 Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit 3

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 13 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit einer 3×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + (-7) \cdot (-2) + 6 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix

•Produkt aus der Matrix A und der inversen Matrix A^{-1} ist gleich der Einheitsmatrix.

$AA^{-1} = E$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

•Die inverse Matrix ist nur möglich, wenn die Determinante von A ungleich Null ist.

$\det A \neq 0$

• Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

Matrix A und Einheitsmatrix E in der Form schreiben

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{A} & \multicolumn{2}{c}{E} \\ \hline a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}$$

Umformen durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

in die Form Einheitsmatrix und inverse Matrix A^-1

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{E} & \multicolumn{2}{c}{A^{-1}} \\ \hline 1 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{21} & x_{22} \end{array}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$det(A) = (-10) \Rightarrow$ Matrix ist invertierbar

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile2 = Zeile2 - Zeile1 $\cdot \frac{4}{2}$

$a21 = 4 - 2 \cdot \frac{4}{2} = 0$

$a22 = 1 - 3 \cdot \frac{4}{2} = -5$

$b21 = 0 - 1 \cdot \frac{4}{2} = 0$

$b22 = 1 - 0 \cdot \frac{4}{2} = 1$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile1 = Zeile1 - Zeile2 $\cdot \frac{3}{-5}$

$a12 = 3 - (-5) \cdot \frac{3}{-5} = 0$

$b11 = 1 - (-2) \cdot \frac{3}{-5} = 1$

$b12 = 0 - 1 \cdot \frac{3}{-5} = 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile1 = Zeile1 : 2

Zeile2 = Zeile2 : -5

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & A & & & E & \\ \hline 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} & E & & & E' = A^{-1} & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Gegegeben: A - Matrix
Gesucht: x - Eigenvektor (Spaltenvektor)
λ - *Eigenwert*
Das Produkt aus Matrix A und Eigenvektor x ist gleich dem Produkt aus Eigenwert λ und Eigenvektor x.
$Ax = \lambda x$
$\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{21} \end{array}\right] = \lambda \left[\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{21} \end{array}\right]$

•Eigenwert aus folgender Gleichung:
$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$
$A = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]$
$\left|\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array}\right]\right| = 0$
$\left|\left[\begin{array}{cc} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{array}\right]\right| = 0$
$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$
charakteristisches Polynom
$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$
•Eigenvektoren durch einsetzen der λ-Werte
$(A - \lambda E)x = 0$
$\left[\begin{array}{cc} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = 0$
$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_1$
$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_2$

$A = \left[\begin{array}{ccc} 7 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{array}\right]$
$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$
$\left[\begin{array}{ccc} 7-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{array}\right] = 0$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.6.2 Determinante

Definiton

Aus quadratischen Matrix kann eine Determinante (Zahlenwert) berechnet werden.
D=det $A = |A|$
Anwendung der Determinante:
- Lineare Gleichungssysteme
- Volumenberechnung im R3
- Flächenberechnungen im R2
- Spatprodukt
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren - inverse Matrix

2-reihige Determinante

Determinante einer 2×2 Matrix
$D = \det A = |A| = \left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right| = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

$D = \det A = |A| = \left|\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{array}\right| = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23$

3-reihige Determinante

Determinante einer 3×3 Matrix

Methode 1

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$

Methode 2 (Regel von Sarrus)

$$\text{D}=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$D = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3$

$- c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D = \det A = |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 11 & 13 & 4 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 5 & 12 & 14 \\ 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right.$$

$D = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3$

$-4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 9 \\ 13 & 14 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$11 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 13 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 54$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 14 \cdot 9 = -90$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = -9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 27$$

$D_3 = 11 \cdot 27 - 13 \cdot (-9) + 4 \cdot (-90) = 54$

$det(D) = 54$

Interaktive Inhalte: hier klicken hier klicken hier klicken

1.6.3 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise

$Ax = b \qquad x = A^{-1}b$

A Koeffizientenmatrix

b Spaltenvektor der rechten Seite

x *Lösungsvektor*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Inhomogenes Gleichungssystem

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$

Homogenes Gleichungssystem

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0$

$\vdots$

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0$

Variablen:x_1,x_2,x_3

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$

$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_m$

oder in der Schreibweise mit den Variablen:x, y, z

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$

$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$

$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

$Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$11x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 37$

$12x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 40$

$9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15$

oder

$11x + 13y + 4z = 37$

$12x + 14y + 5z = 40$

$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

Gaußsches Eliminationsverfahren

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$
$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$
$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:
- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Umformen in die Stufenform
- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

Rückwärtseinsetzen
$z = \frac{z3s3}{z3s4}$
z in die 2. Zeile einsetzen $\Rightarrow$ y
z und y in die 1. Zeile einsetzen $\Rightarrow$ x

- Keine Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	0

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} \cdot 11 - \text{Zeile1} \cdot 12$
$z2s1 = 12 \cdot 11 - 11 \cdot 12 = 0$
$z2s2 = 14 \cdot 11 - 13 \cdot 12 = -2$
$z2s3 = 5 \cdot 11 - 4 \cdot 12 = 7$
$z2s4 = 40 \cdot 11 - 37 \cdot 12 = -4$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
9	3	3	15

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} \cdot 11 - \text{Zeile1} \cdot 9$
$z3s1 = 9 \cdot 11 - 11 \cdot 9 = 0$
$z3s2 = 3 \cdot 11 - 13 \cdot 9 = -84$
$z3s3 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 9 = -3$
$z3s4 = 15 \cdot 11 - 37 \cdot 9 = -168$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
0	−84	−3	−168

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} \cdot (-2) - \text{Zeile2} \cdot (-84)$
$z3s2 = (-84) \cdot -2 - (-2) \cdot (-84) = 0$
$z3s3 = (-3) \cdot -2 - 7 \cdot (-84) = 594$
$z3s4 = (-168) \cdot -2 - (-4) \cdot (-84) = 0$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
0	0	594	0

$z = \frac{0}{594} = 0$
$y \cdot (-2) + 7 \cdot 0 = (-4)$
$y = 2$
$x \cdot 11 + 13 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 37$
$x = 1$
$L = \{1/2/0\}$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$
$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$
$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Ziel ist das Umformen in die Diagonalenform

- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

$x = \frac{z1s4}{z1s1}$
$y = \frac{z2s4}{z2s3}$
$z = \frac{z3s3}{z3s4}$

- Keine Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	0

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} - \text{Zeile1} \cdot \frac{12}{11}$
$z2s1 = 12 - 11 \cdot \frac{12}{11} = 0$
$z2s2 = 14 - 13 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{2}{11}$
$z2s3 = 5 - 4 \cdot \frac{12}{11} = \frac{7}{11}$
$z2s4 = 40 - 37 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{4}{11}$

x	y	z	
11	13	4	37
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
9	3	3	15

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} - \text{Zeile1} \cdot \frac{9}{11}$
$z3s1 = 9 - 11 \cdot \frac{9}{11} = 0$
$z3s2 = 3 - 13 \cdot \frac{9}{11} = -7\frac{7}{11}$
$z3s3 = 3 - 4 \cdot \frac{9}{11} = -\frac{3}{11}$
$z3s4 = 15 - 37 \cdot \frac{9}{11} = -15\frac{3}{11}$

x	y	z	
11	13	4	37
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	$-7\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-15\frac{3}{11}$

$\text{Zeile1} = \text{Zeile1} - \text{Zeile2} \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}}$
$z1s2 = 13 - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 0$
$z1s3 = 4 - \frac{7}{11} \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 49\frac{1}{2}$
$z1s4 = 37 - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 11$

x	y	z	
11	0	$49\frac{1}{2}$	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	$-7\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-15\frac{3}{11}$

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} - \text{Zeile2} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}}$
$z3s2 = -7\frac{7}{11} - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0$
$z3s3 = -\frac{3}{11} - \frac{7}{11} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = -27$
$z3s4 = -15\frac{3}{11} - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0$

x	y	z	
11	0	$49\frac{1}{2}$	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$\text{Zeile1} = \text{Zeile1} - \text{Zeile3} \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27}$
$z1s3 = 49\frac{1}{2} - (-27) \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 0$
$z1s4 = 11 - 0 \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 11$

x	y	z	
11	0	0	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} - \text{Zeile3} \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27}$
$z2s3 = \frac{7}{11} - (-27) \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = 0$
$z2s4 = -\frac{4}{11} - 0 \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = -\frac{4}{11}$

x	y	z	
11	0	0	11
0	$-\frac{2}{11}$	0	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$x = \frac{11}{11} = 1$
$y = \frac{-\frac{4}{11}}{-\frac{2}{11}} = 2$
$z = \frac{0}{-27} = 0$
$L = \{1/2/0\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken hier klicken hier klicken

1.7 Finanzmathematik

1.7.1 Zinsrechnung - Jahreszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$

Anzahl der Jahre	t		Jahre
Kapital	K	*Euro*	Europa
Zinssatz	p	%	Prozent
Zinsen	z	*Euro*	Europa

$p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$ - $p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$ -

1.7.2 Zinsrechnung - Tageszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$

Anzahl der Tage	t		Tage
Kapital	K	*Euro*	Europa
Zinssatz	p	%	Prozent
Zinsen	z	*Euro*	Europa

$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ - $p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$ -

1.7.3 Zinsrechnung - Monatszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$

Anzahl der Monate	t		
Kapital	K	*Euro*	Europa
Zinssatz	p	%	Prozent
Zinsen	z	*Euro*	Europa

$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$ - $p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$ -

1.7.4 Zinsfaktor

$q = 1 + \frac{p}{100}$

Zinssatz	p	%	Prozent
Zinsfaktor	q		

$p = (q - 1) \cdot 100$

Interaktive Inhalte: $q = 1 + \frac{p}{100}$ - $p = (q - 1) \cdot 100$ -

1.7.5 Zinseszinsformel

$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$

Anzahl der Jahre	t		Jahre
Zinssatz	p	%	Prozent
Anfangskapital	K_0	*Euro*	Europa
Kapital nach t Jahren	K_t	*Euro*	Europa

$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t}$ $p = (\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1) \cdot 100$

$t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

Interaktive Inhalte: $K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$ - $K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t}$ - $p = (\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1) \cdot 100$ - $t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$ -

1.7.6 Degressive Abschreibung

$B_t = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$

Anzahl der Jahre	t		Jahre
Abschreibungssatz	p	%	
Anschaffungswert	B_0	*Euro*	Deutschland
Buchwert	B_t	*Euro*	Deutschland

$B_0 = \frac{B_t}{(1-\frac{p}{100})^t}$ $t = \frac{\ln(B_t) - \ln(B_0)}{\ln(1-\frac{p}{100})}$ $p = (1 - \sqrt[t]{\frac{B_t}{B_0}}) \cdot 100$

Interaktive Inhalte: $B_t = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$ - $B_0 = \frac{B_t}{(1-\frac{p}{100})^t}$ - $t = \frac{\ln(B_t) - \ln(B_0)}{\ln(1-\frac{p}{100})}$ - $p = (1 - \sqrt[t]{\frac{B_t}{B_0}}) \cdot 100$ -

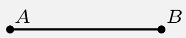
2 Geometrie

2.1 Grundlagen

2.1.1 Definitionen

Strecke $[AB]$

Gerade Linie die durch 2 Endpunkte begrenzt wird



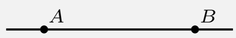
Länge einer Strecke $\overline{AB}$

Entfernung zwischen den Punkten A und B

$\overline{AB} = 3cm$

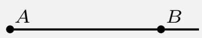
Gerade AB

Unbegrenzte gerade Linie durch 2 Punkte



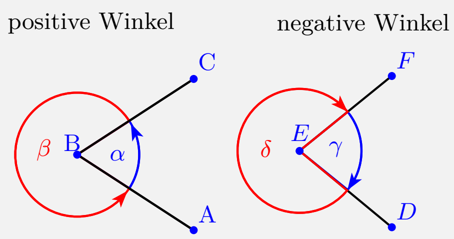
Halbgerade - Strahl $[AB$

Einseitig begrenzte gerade Linie



Winkel

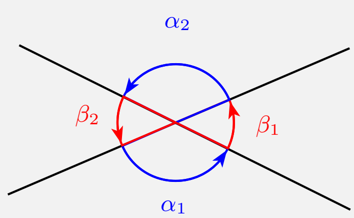
Zwei von einem Punkt (Scheitel) ausgehenden Halbgeraden (Schenkel) schließen einen Winkel ein.
$\alpha = \measuredangle ABC$
Drehsinn entgegen dem Uhrzeigersinn = positiver Winkel
Drehsinn im Uhrzeigersinn = negativer Winkel
spitzer Winkel: $0° < \alpha < 90°$
rechter Winkel: $\alpha = 90°$
stumpfer Winkel: $90° < \alpha < 180°$
gestreckter Winkel: $\alpha = 180°$
überstumpfer Winkel: $180° < \alpha < 360°$
Vollwinkel: $\alpha = 360°$



B Scheitelpunkt
$[BA, [BC$ Schenkel
$\alpha = \measuredangle ABC \qquad \beta = \measuredangle CBA$

Winkel an sich schneidenden Geraden

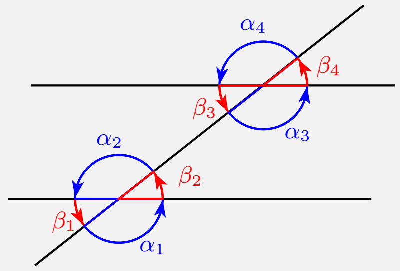
Scheitelwinkel (Gegenwinkel) sind gleich groß.
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.



Scheitelwinkel: $\alpha_1 = \alpha_2; \beta_1 = \beta_2$
Nebenwinkel: $\alpha_1 + \beta_1 = 180°; \alpha_2 + \beta_2 = 180°$

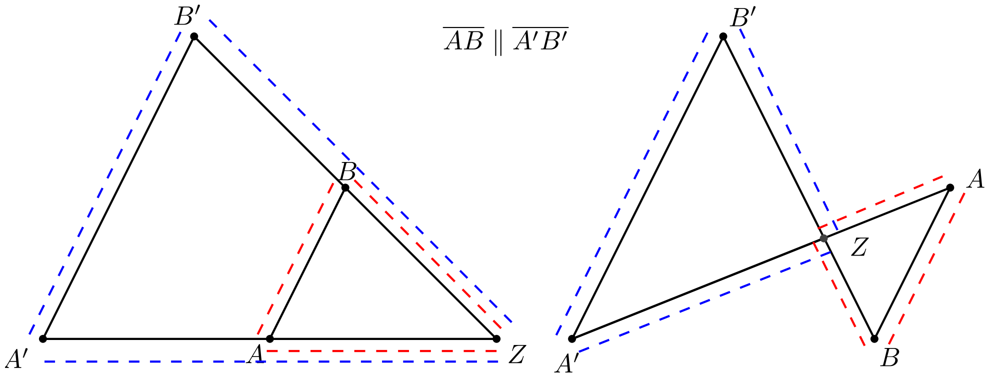
Winkel an parallelen Geraden

Stufenwinkel (F-Winkel) und Wechselwinkel (Z-Winkel) sind gleich groß. Nachbarwinkel (E-Winkel) ergänzen sich zu 180°.



$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$
$\alpha + \beta = 180°$
Stufenwinkel: $\alpha_1 = \alpha_3; \beta_1 = \beta_3$
Wechselwinkel: $\alpha_2 = \alpha_3; \beta_2 = \beta_3$
Nachbarwinkel: $\alpha_3 + \beta_2 = 180°; \alpha_2 + \beta_3 = 180°$

2.1.2 Strahlensätze



$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

2.2 Dreieck

2.2.1 Definitionen und Eigenschaften des Dreiecks

Winkel- und Seitenbeziehungen

- Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- Außenwinkelsumme: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

$\gamma' = \alpha + \beta; \beta' = \alpha + \gamma; \alpha' = \beta + \gamma;$

- Dreiecksungleichung:

Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte Seite.

$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$

- Der längeren von zwei Seiten liegt der größere Winkel gegenüber.

$a > b \Rightarrow \alpha > \beta \qquad a < b \Rightarrow \alpha < \beta$

$a > c \Rightarrow \alpha > \gamma \qquad a < c \Rightarrow \alpha < \gamma$

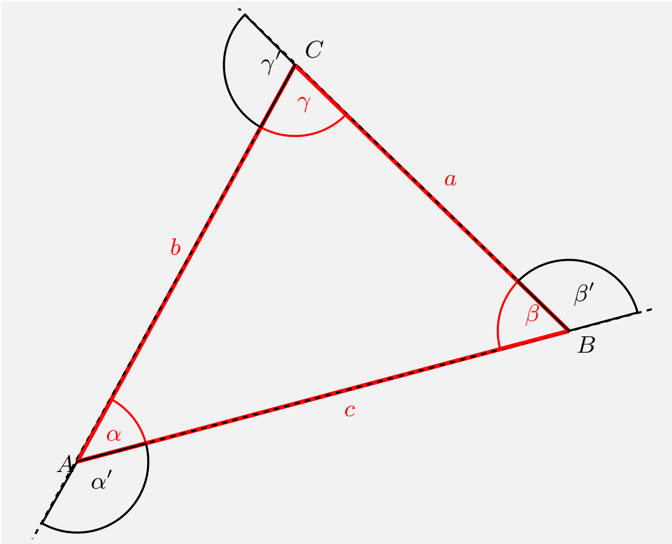
$b > c \Rightarrow \beta > \gamma \qquad b < c \Rightarrow \beta < \gamma$

- Gleichlangen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

$a = b \Rightarrow \alpha = \beta$

$a = c \Rightarrow \alpha = \gamma$

$b = c \Rightarrow \beta = \gamma$



Höhe

Das Lot von einem Eckpunkt des Dreiecks auf die gegenüberliegende Dreiecksseite. Höhen schneiden sich im Höhenschnittpunkt.

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$

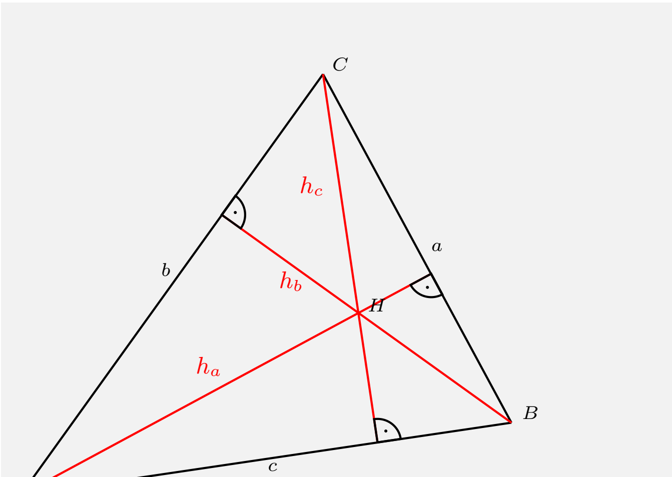
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$h_a = c \cdot \sin\beta$

$h_b = a \cdot \sin\gamma$

$h_c = b \cdot \sin\alpha$



Höhen

Winkelhalbierende

Alle Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben zu den Schenkeln den gleichen Abstand. Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Inkreismittelpunkt. Der Inkreismittelpunkt hat von den drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand.

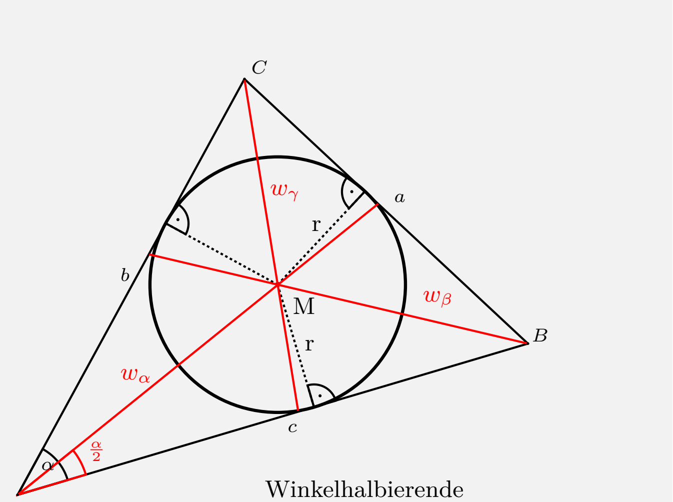
Inkreisradius:

$\rho = r_i = \frac{2 \cdot A}{U} = \frac{2 \cdot A}{a+b+c}$

$\delta_1 = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2}$ $\qquad w_\alpha = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\delta_1}$

$\delta_2 = 180° - \frac{\beta}{2} - \gamma$ $\qquad w_\beta = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\delta_2}$

$\delta_3 = 180° - \alpha - \frac{\gamma}{2}$ $\qquad w_\gamma = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\delta_3}$



Winkelhalbierende

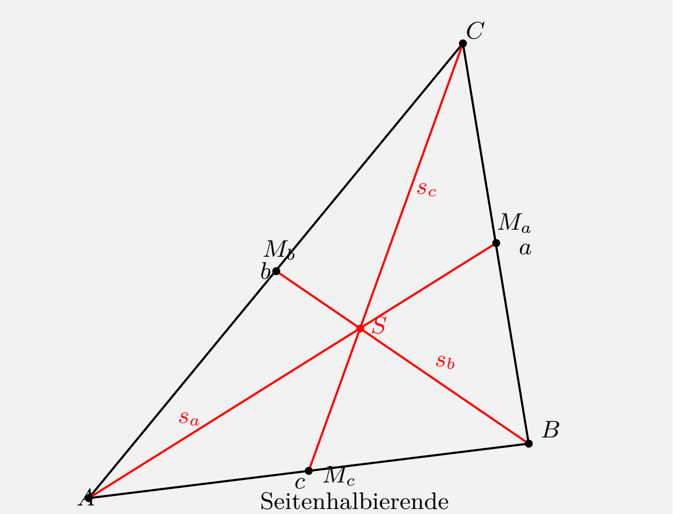
Seitenhalbierende

Strecke vom einem Eckpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

$s_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

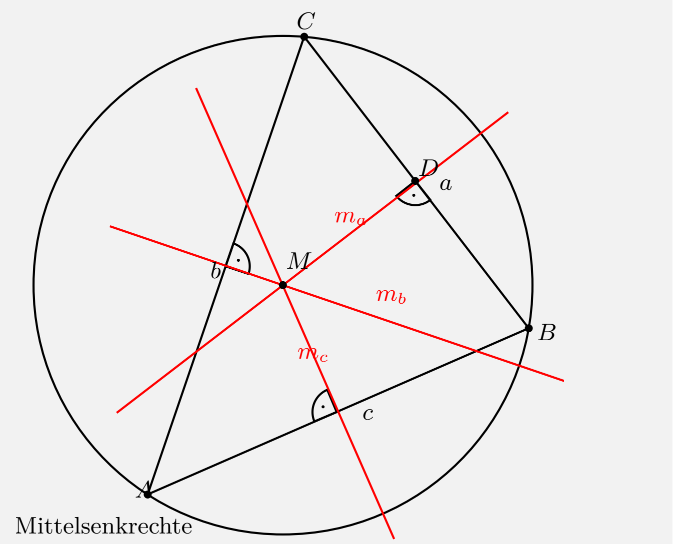


Seitenhalbierende

Mittelsenkrechte

Alle Punkte auf einer Mittelsenkrechte haben von zwei Eckpunkten die gleiche Entfernung. Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt. Der Umkreismittelpunkt hat von den drei Eckpunkten des Dreiecks die gleiche Entfernung.

Umkreisradius: $r_u = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin\beta} = \frac{c}{2 \cdot \sin\gamma}$



Mittelsenkrechte

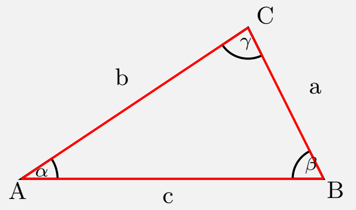
Interaktive Inhalte: hier klicken

2.2.2 Kongruenzsätze

Seite - Seite - Seite (SSS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Seite	Seite	Seite
a	b	c

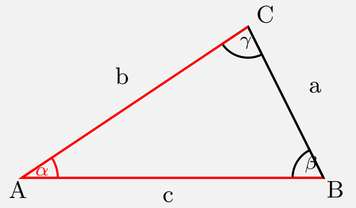


$a = 2,2cm$ $b = 3.6cm$ $c = 4cm$

Seite - Winkel - Seite (SWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c



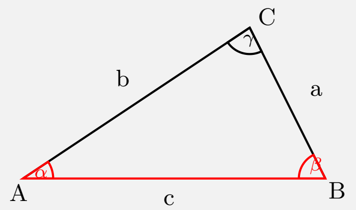
$b = 3.6cm$ $c = 4cm$ $\alpha = 33°$

Winkel - Seite - Winkel (WSW,WWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen.

Winkel	Seite	Winkel
α	c	β
α	b	γ
β	a	γ

Winkel	Winkel	Seite
α	β	a
α	β	b
α	γ	a
α	γ	c
β	γ	b
β	γ	c

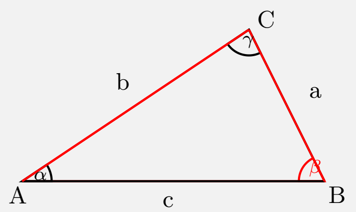


$c = 4cm$ $\alpha = 33°$ $\beta = 63°$

Seite - Seite - Winkel (SsW)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Gegenwinkel) übereinstimmen.

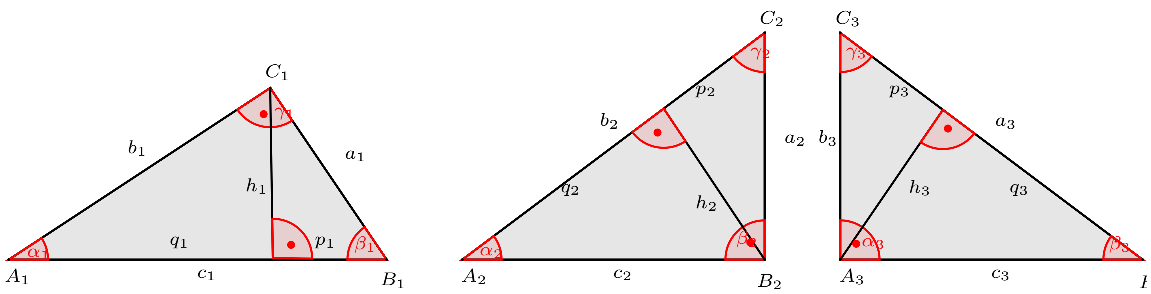
Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	a>b
a	b	β	b>a
a	c	α	a>c
a	c	γ	c>a
b	c	β	b>c
b	c	γ	c>b



$a = 2,2cm$ $b = 3,6cm$ $\beta = 63°$

Interaktive Inhalte: hier klicken

2.2.3 Pythagoras - Höhensatz - Kathetensatz



Pythagoras

Die Katheten sind die am rechten Winkel anliegenden Seiten. Die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber.

• Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

für $\gamma = 90°$ Katheten a und b Hypotenuse c

$a^2 + b^2 = c^2$

$\triangle A_1B_1C_1$

$\gamma_1 = 90^\circ$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$

$c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ $\quad a_1 = \sqrt{c_1^2 - b_1^2}$ $\quad b_1 = \sqrt{c_1^2 - a_1^2}$

$\triangle A_2B_2C_2$

$\beta_2 = 90°$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

$a_2^2 + c_2^2 = b_2^2$

$b_2 = \sqrt{a_2^2 + c_2^2}$ $\quad a_2 = \sqrt{b_2^2 - c_2^2}$ $\quad c_2 = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}$

$\triangle A_3B_3C_3$

$\alpha_3 = 90°$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

$a_3^2 + b_3^2 = c_3^2$

$a_3 = \sqrt{b_3^2 + c_3^2}$ $\quad b_3 = \sqrt{a_3^2 - c_3^2}$ $\quad c_3 = \sqrt{a_3^2 - b_3^2}$

Kathetensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.

• Die Kathete im Quadrat ist gleich dem Produkt aus dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse.

für $\gamma = 90°$ $\quad c = p + q$

Katheten a und b Hypotenuse c

Hypotenusenabschnitt p und q

$a^2 = c \cdot p$ $\quad b^2 = c \cdot q$

$\triangle A_1B_1C_1$

$\gamma_1 = 90°$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

Hypotenusenabschnitte p_1 und q_1 $\quad c_1 = p_1 + q_1$

$a_1^2 = c_1 \cdot p_1$ $\quad a_1 = \sqrt{c_1 \cdot p_1}$ $\quad c_1 = \frac{a_1^2}{p_1}$ $\quad p_1 = \frac{a_1^2}{c_1}$

$b_1^2 = c_1 \cdot q_1$ $\quad b_1 = \sqrt{c_1 \cdot q_1}$ $\quad c_1 = \frac{b_1^2}{q_1}$ $\quad q_1 = \frac{b_1^2}{c_1}$

$\triangle A_2B_2C_2$

$\beta_2 = 90°$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

Hypotenusenabschnitte p_2 und q_2 $\quad b_2 = p_2 + q_2$

$a_2^2 = b_2 \cdot p_2$ $\quad a_2 = \sqrt{b_2 \cdot p_2}$ $\quad b_2 = \frac{a_2^2}{p_2}$ $\quad p_2 = \frac{a_2^2}{b_2}$

$c_2^2 = b_2 \cdot q_2$ $\quad c_2 = \sqrt{b_2 \cdot q_2}$ $\quad b_2 = \frac{c_2^2}{q_2}$ $\quad q_2 = \frac{c_2^2}{b_2}$

$\triangle A_3B_3C_3$

$\alpha_3 = 90°$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

Hypotenusenabschnitte p_3 und q_3 $\quad a_3 = p_3 + q_3$

$b_3^2 = a_3 \cdot p_3$ $\quad b_3 = \sqrt{a_3 \cdot p_3}$ $\quad a_3 = \frac{b_3^2}{p_3}$ $\quad p_3 = \frac{b_3^2}{a_3}$

$c_3^2 = a_3 \cdot q_3$ $\quad c_3 = \sqrt{a_3 \cdot q_3}$ $\quad a_3 = \frac{c_3^2}{q_3}$ $\quad q_3 = \frac{c_3^2}{a_3}$

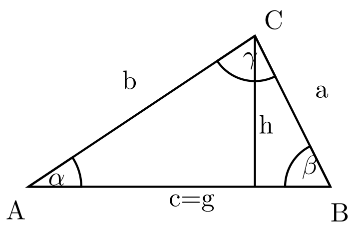
Höhensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.
• Die Höhe im Quadrat ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.
für $\gamma = 90°$ $c = p + q$
Hypotenusenabschnitte p und q
$h^2 = p \cdot q$

$\triangle A_1B_1C_1$
$\gamma_1 = 90°$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1
Hypotenusenabschnitte p_1 und q_1 $c_1 = p_1 + q_1$
$h_1^2 = p_1 \cdot q_1$ $h_1 = \sqrt{p_1 \cdot q_1}$ $p_1 = \frac{h_1^2}{q_1}$ $q_2 = \frac{h_1^2}{p_1}$
$\triangle A_2B_2C_2$
$\beta_2 = 90°$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2
Hypotenusenabschnitte p_2 und q_2 $b_2 = p_2 + q_2$
$h_2^2 = p_2 \cdot q_2$ $h_2 = \sqrt{p_2 \cdot q_2}$ $p_2 = \frac{h_2^2}{q_2}$ $q_2 = \frac{h_2^2}{p_2}$
$\triangle A_3B_3C_3$
$\alpha_3 = 90°$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3
Hypotenusenabschnitte p_3 und q_3 $a_3 = p_3 + q_3$
$h_3^2 = p_3 \cdot q_3$ $h_3 = \sqrt{p_3 \cdot q_3}$ $p_3 = \frac{h_3^2}{q_3}$ $q_3 = \frac{h_3^2}{p_3}$

Interaktive Inhalte: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ - $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ - $h = \sqrt{p \cdot q}$ - $q = \frac{h^2}{p}$ - $p = \frac{h^2}{q}$ - $a = \sqrt{c \cdot p}$ - $c = \frac{a^2}{p}$ - $p = \frac{a^2}{c}$ -

2.2.4 Allgemeines Dreieck



$A = \frac{g \cdot h}{2}$

Grundlinie	g	m	Meter
Höhe	h	m	Meter
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$g = \frac{A \cdot 2}{h}$ $h = \frac{A \cdot 2}{g}$

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)$

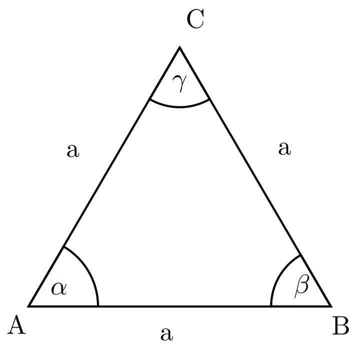
Länge der Seite	b	m	Meter
Länge der Seite	a	m	Meter
Winkel gamma	γ	$°$	Grad
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$U = a + b + c$

Länge der Seite	c	m	Meter
Länge der Seite	b	m	Meter
Länge der Seite	a	m	Meter
Umfang	U	m	Meter

Interaktive Inhalte: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ - $g = \frac{A \cdot 2}{h}$ - $h = \frac{A \cdot 2}{g}$ - $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)$ - $U = a + b + c$ -

2.2.5 Gleichseitiges Dreieck



$\alpha = \beta = \gamma = 60°$ $a = b = c$

$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

Grundlinie a	a	m	Meter
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$a = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\sqrt{3}}}$

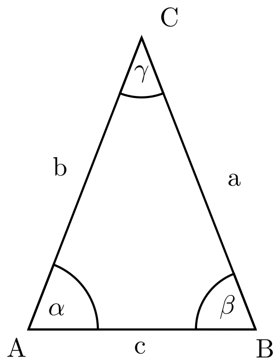
$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

Höhe	h	m	Meter
Grundlinie a	a	m	Meter

$a = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$

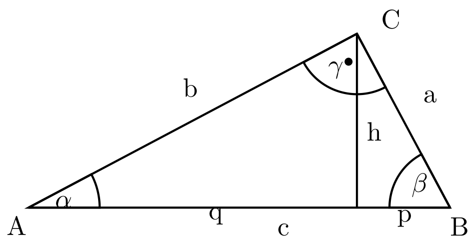
Interaktive Inhalte: $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ - $a = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\sqrt{3}}}$ - $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ - $a = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$ -

2.2.6 Gleichschenkliges Dreieck



Basiswinkel sind gleich	$\alpha = \beta$
Schenkel sind gleich lang	$a = b$

2.2.7 Rechtwinkliges Dreieck



$A = \frac{a \cdot b}{2}$

Ankathete zu α	b	m	Meter
Gegenkathete zu α	a	m	Meter
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$a = \frac{A \cdot 2}{b}$ $\quad b = \frac{A \cdot 2}{a}$

Phytagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Gegenkathete zu α	a	m	Meter
Ankathete zu α	b	m	Meter
Hypotenuse	c	m	Meter

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Hypotenusenabschnitt	q	m	Meter
Hypotenusenabschnitt	p	m	Meter
Höhe	h	m	Meter

$h = \sqrt{p \cdot q}$ $\quad q = \frac{h^2}{p}$ $\quad p = \frac{h^2}{q}$

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$

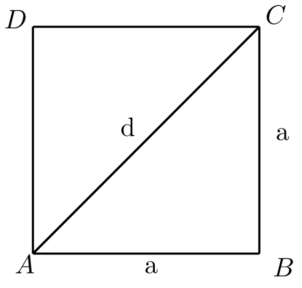
Hypotenusenabschnitt	p	m	Meter
Hypotenuse	c	m	Meter
Gegenkathete zu α	a	m	Meter

$a = \sqrt{c \cdot p}$ $\quad c = \frac{a^2}{p}$ $\quad p = \frac{a^2}{c}$

Interaktive Inhalte: $A = \frac{a \cdot b}{2}$ - $a = \frac{A \cdot 2}{b}$ - $b = \frac{A \cdot 2}{a}$ - $a^2 + b^2 = c^2$ - $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ - $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ - $h^2 = p \cdot q$ - $h = \sqrt{p \cdot q}$ - $q = \frac{h^2}{p}$ - $p = \frac{h^2}{q}$ - $a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$ - $a = \sqrt{c \cdot p}$ - $c = \frac{a^2}{p}$ - $p = \frac{a^2}{c}$ -

2.3 Viereck

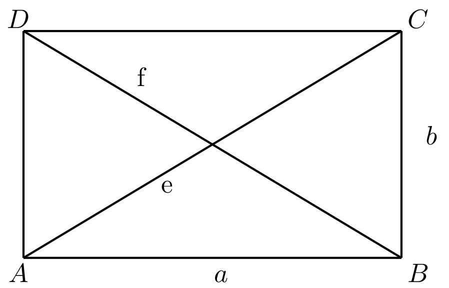
2.3.1 Quadrat



$A = a^2$	Seite a m Meter Fläche A m^2 Quadratmeter $a = \sqrt{A}$
$U = 4 \cdot a$	Seite a m Meter Umfang U m Meter $a = \frac{U}{4}$
$d = a \cdot \sqrt{2}$	Seite a m Meter Diagonale d m Meter $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

Interaktive Inhalte: $A = a^2$ - $a = \sqrt{A}$ - $U = 4 \cdot a$ - $a = \frac{U}{4}$ - $d = a \cdot \sqrt{2}$ - $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ -

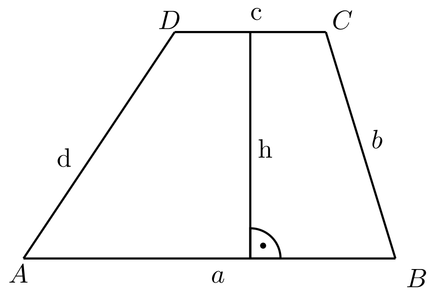
2.3.2 Rechteck



$A = a \cdot b$	Breite b m Meter Länge a m Meter Fläche A m^2 Quadratmeter $a = \frac{A}{b}$ $b = \frac{A}{a}$
$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$	Breite b m Meter Länge a m Meter Umfang U m Meter $a = \frac{U-2 \cdot b}{2}$ $b = \frac{U-2 \cdot a}{2}$
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$	Breite b m Meter Länge a m Meter Diagonale d m Meter $b = \sqrt{d^2 - a^2}$ $a = \sqrt{d^2 - b^2}$

Interaktive Inhalte: $A = a \cdot b$ - $a = \frac{A}{b}$ - $b = \frac{A}{a}$ - $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ - $a = \frac{U-2 \cdot b}{2}$ - $b = \frac{U-2 \cdot a}{2}$ - $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ - $b = \sqrt{d^2 - a^2}$ - $a = \sqrt{d^2 - b^2}$ -

2.3.3 Trapez



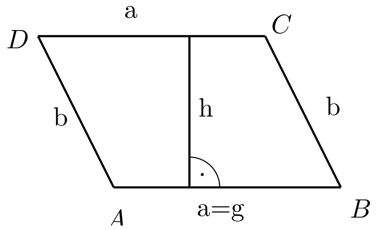
$\boxed{A = \frac{a+c}{2} \cdot h}$

Grundlinie c	c	m	Meter
Grundlinie a	a	m	Meter
Höhe	h	m	Meter
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$a = \frac{2 \cdot A}{h} - c$ $\quad c = \frac{2 \cdot A}{h} - a$ $\quad h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$

Interaktive Inhalte: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ - $a = \frac{2 \cdot A}{h} - c$ - $c = \frac{2 \cdot A}{h} - a$ - $h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$ -

2.3.4 Parallelogramm



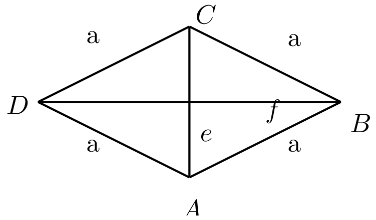
$\boxed{A = g \cdot h}$

Höhe	h	m	Meter
Grundlinie	g	m	Meter
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$g = \frac{A}{h}$ $\quad h = \frac{A}{g}$

Interaktive Inhalte: $A = g \cdot h$ - $g = \frac{A}{h}$ - $h = \frac{A}{g}$ -

2.3.5 Raute



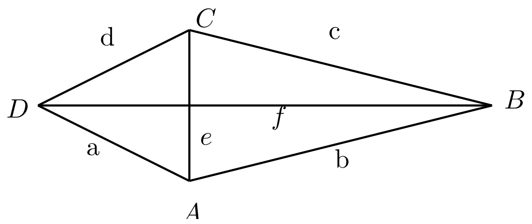
$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$

Diagonale f	f	m	Meter
Diagonale e	e	m	Meter
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$e = \frac{2 \cdot A}{f}$ $\quad f = \frac{2 \cdot A}{e}$

Interaktive Inhalte: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ - $e = \frac{2 \cdot A}{f}$ - $f = \frac{2 \cdot A}{e}$ -

2.3.6 Drachen



$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$$

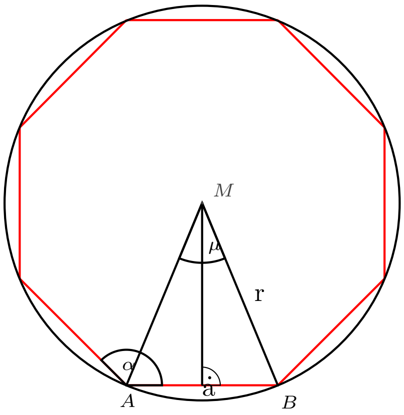
Diagonale f	f	m	Meter
Diagonale e	e	m	Meter
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$e = \frac{2 \cdot A}{f}$ $\quad f = \frac{2 \cdot A}{e}$

Interaktive Inhalte: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ - $e = \frac{2 \cdot A}{f}$ - $f = \frac{2 \cdot A}{e}$ -

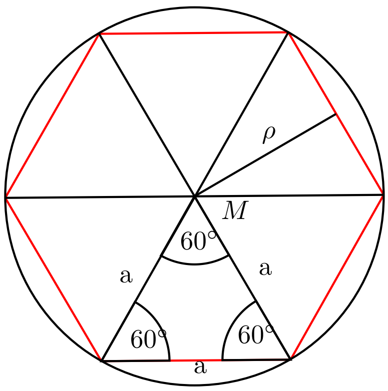
2.4 Polygone (n-Ecken)

2.4.1 Regelmäßiges n-Eck



Seitenlänge n-Eck: $a = 2 \cdot r \sin \frac{\mu}{2}$
Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360^\circ}{n}$
Innenwinkel: $\alpha = 180^\circ - \mu$
Fläche: $A = n \cdot A_D = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \mu$

2.4.2 Sechseck



Seitenlänge 6-Eck: $a = r$
Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$
Innenwinkel: $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$

Grundlinie a	a	m	Meter
Fläche	A	m^2	Quadratmeter

$a = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$

$\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

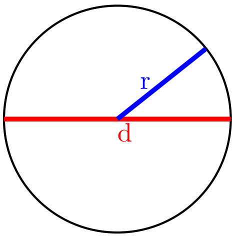
Grundlinie a	a	m	Meter

$a = \frac{\rho \cdot 2}{\sqrt{3}}$

Interaktive Inhalte: $A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$ - $a = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$ - $\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ - $a = \frac{\rho \cdot 2}{\sqrt{3}}$ -

2.5 Kreis

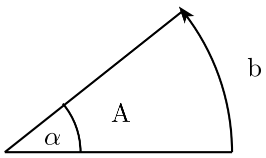
2.5.1 Kreis



$d = 2 \cdot r$	Radius r m Meter Durchmesser d m Meter $r = \frac{d}{2}$
$A = r^2 \cdot \pi$	Kreiszahl π 3,1415927 Radius r m Meter Fläche A m^2 Quadratmeter $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
$U = 2 \cdot r \cdot \pi$	Kreiszahl π 3,1415927 Radius r m Meter Umfang U m Meter $r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$

Interaktive Inhalte: $d = 2 \cdot r$ - $r = \frac{d}{2}$ - $A = r^2 \cdot \pi$ - $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ - $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ - $r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$ -

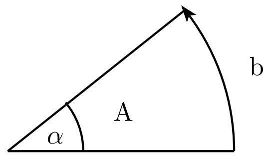
2.5.2 Kreissektor (Grad)



$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$	Winkel α $^\circ$ Grad Kreiszahl π 3,1415927 Radius r m Meter Fläche A m^2 Quadratmeter $r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\alpha \cdot \pi}}$ $\alpha = \frac{A \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$
$b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$	Kreiszahl π 3,1415927 Radius r m Meter Winkel α $^\circ$ Grad Kreisbogen b m Meter $r = \frac{b \cdot 360}{\alpha \cdot \pi \cdot 2}$ $\alpha = \frac{b \cdot 360}{r \cdot \pi \cdot 2}$

Interaktive Inhalte: $A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ - $r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\alpha \cdot \pi}}$ - $\alpha = \frac{A \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$ - $b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ - $r = \frac{b \cdot 360}{\alpha \cdot \pi \cdot 2}$ - $\alpha = \frac{b \cdot 360}{r \cdot \pi \cdot 2}$ -

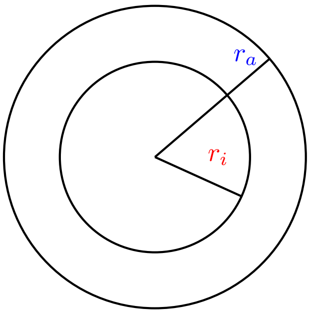
2.5.3 Kreissektor (Bogenmaß)



$A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$	Winkel x x rad Radiant (Bogenmaß) Radius r m Meter Fläche A m^2 Quadratmeter $r = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{x}}$ $x = \frac{A \cdot 2}{r^2}$
$b = r \cdot x$	Radius r m Meter Winkel x x rad Radiant (Bogenmaß) Kreisbogen b m Meter $r = \frac{b}{x}$ $x = \frac{b}{r}$

Interaktive Inhalte: $A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$ - $r = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{x}}$ - $x = \frac{A \cdot 2}{r^2}$ - $b = r \cdot x$ - $r = \frac{b}{x}$ - $x = \frac{b}{r}$ - hier klicken

2.5.4 Kreisring

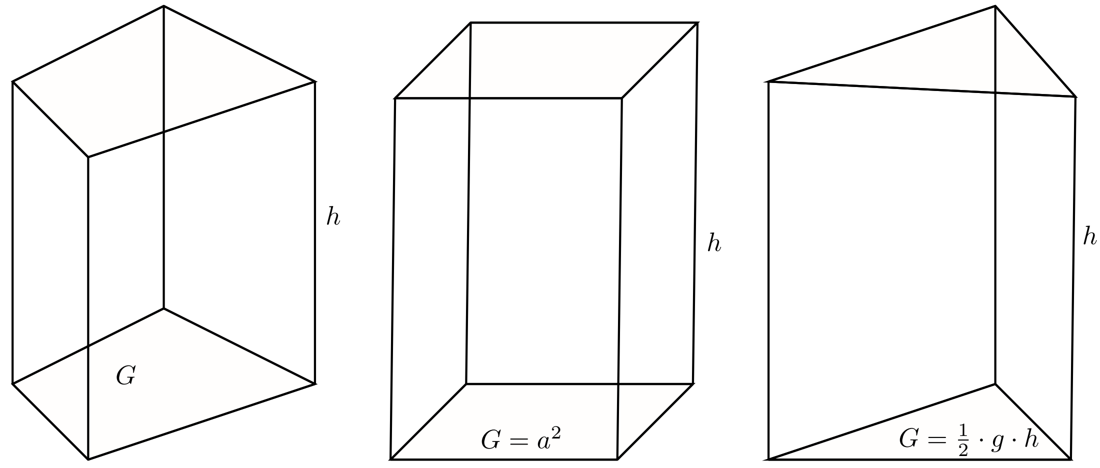


$A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$	Kreiszahl π $3,1415927$ Radius (außerer Kreis) r_a m Meter Radius (innerer Kreis) r_i m Meter Fläche A m^2 Quadratmeter $r_a = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_i^2}$ $r_i = \sqrt{r_a^2 - \frac{A}{\pi}}$

Interaktive Inhalte: $A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$ - $r_a = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_i^2}$ - $r_i = \sqrt{r_a^2 - \frac{A}{\pi}}$ -

2.6 Stereometrie

2.6.1 Prisma



Quadratisches Prisma

Dreiseitiges Prisma

$\boxed{V = G \cdot h}$

Körperhöhe	h	m	Meter
Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Volumen	V	m^3	Kubikmeter

$G = \frac{V}{h}$ $\quad h = \frac{V}{G}$

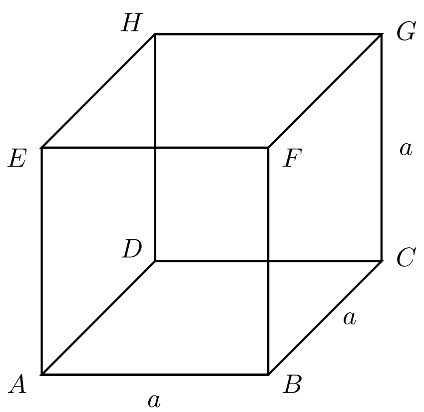
$\boxed{O = 2 \cdot G + M}$

Mantelfläche	M	m^2	Quadratmeter
Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter

$G = \frac{O-M}{2}$ $\quad M = O - 2 \cdot G$

Interaktive Inhalte: $V = G \cdot h$ - $G = \frac{V}{h}$ - $h = \frac{V}{G}$ - $O = 2 \cdot G + M$ - $G = \frac{O-M}{2}$ - $M = O - 2 \cdot G$ -

2.6.2 Würfel



$\boxed{V = a^3}$

Seite	a	m	Meter
Volumen	V	m^3	Kubikmeter

$a = ^3\sqrt{V}$

$\boxed{O = 6 \cdot a^2}$

Seite	a	m	Meter
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter

$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$

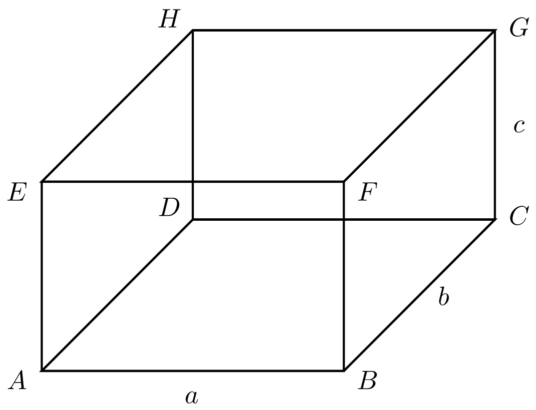
$d = a \cdot \sqrt{3}$

Seite	a	m	Meter
Raumdiagonale	d	m	Meter

$a = \frac{d}{\sqrt{3}}$

Interaktive Inhalte: $V = a^3$ - $a =^3 \sqrt{V}$ - $O = 6 \cdot a^2$ - $a = \sqrt{\frac{O}{6}}$ - $d = a \cdot \sqrt{3}$ - $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$ -

2.6.3 Quader



$V = a \cdot b \cdot c$

Höhe	c	m	Meter
Breite	b	m	Meter
Länge	a	m	Meter
Volumen	V	m^3	Kubikmeter

$a = \frac{V}{b \cdot c}$ $b = \frac{V}{a \cdot c}$ $c = \frac{V}{b \cdot a}$

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Höhe	c	m	Meter
Breite	b	m	Meter
Länge	a	m	Meter
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter

$a = \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b + c)}$ $b = \frac{O - 2 \cdot a \cdot c}{2 \cdot (a + c)}$ $c = \frac{O - 2 \cdot b \cdot a}{2 \cdot (b + a)}$

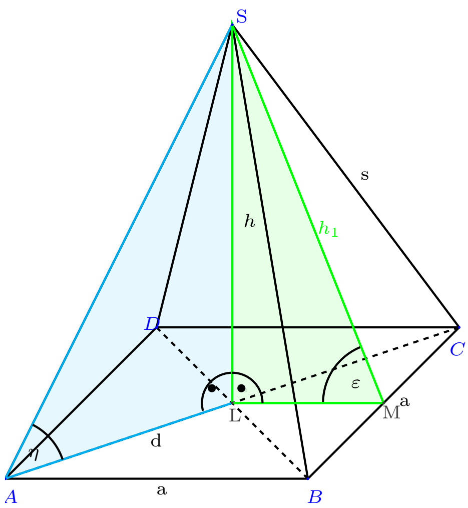
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Höhe	c	m	Meter
Breite	b	m	Meter
Länge	a	m	Meter
Raumdiagonale	d	m	Meter

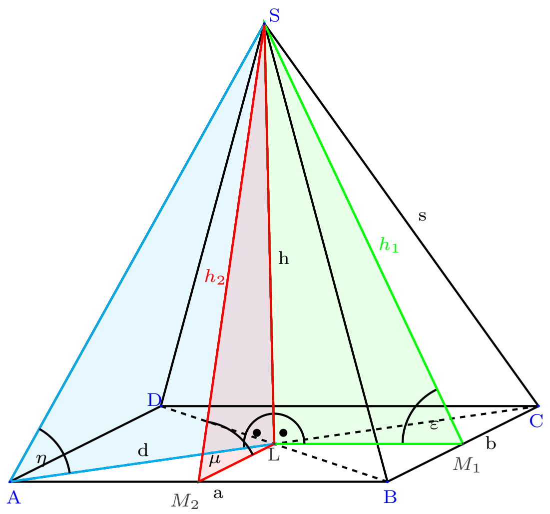
$a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$ $b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}$
$c = \sqrt{d^2 - b^2 - a^2}$

Interaktive Inhalte: $V = a \cdot b \cdot c$ - $a = \frac{V}{b \cdot c}$ - $b = \frac{V}{a \cdot c}$ - $c = \frac{V}{b \cdot a}$ - $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ - $a = \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b + c)}$ - $b = \frac{O - 2 \cdot a \cdot c}{2 \cdot (a + c)}$ - $c = \frac{O - 2 \cdot b \cdot a}{2 \cdot (b + a)}$ - $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ - $a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$ - $b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}$ - $c = \sqrt{d^2 - b^2 - a^2}$ -

2.6.4 Pyramide



Quadratische Grundfläche



Rechteckige Grundfläche

Volumen

$$\boxed{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$$

Körperhöhe	h	m	Meter
Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Volumen	V	m^3	Kubikmeter

$G = \frac{3 \cdot V}{h}$ $\quad h = \frac{3 \cdot V}{G}$

Oberfläche

$$\boxed{O = G + M}$$

Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Mantelfläche	M	m^2	Quadratmeter
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter

$G = O - M$ $\quad M = O - G$

Quadratische Pyramide

Pythagoras im $\triangle ABC$ $\quad d^2 = a^2 + a^2 \quad d = a\sqrt{2}$

Pythagoras im $\triangle LMS$ $\quad h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $\quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

Mantelfläche $\quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$

Grundfläche $\quad G = a^2$

Oberfläche $\quad O = G + M$

Volumen $\quad V = \frac{1}{3} G \cdot h \quad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$\measuredangle CAS \quad \tan\eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$\measuredangle SML \quad \tan\epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

Pythagoras im $\triangle\, ABC \quad d = \sqrt{a^2 + a^2}$

$d = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = 4,24m$

Pythagoras im $\triangle\, LM_1S \quad h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_1 = \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,22m$

Pythagoras im $\triangle\, ALS \quad s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$

$s = \sqrt{\left(\frac{4,24m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,43m$

Mantelfläche $\quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$

$M = 4 \cdot \frac{1}{2} 3m \cdot 5,22m = 31,3m^2$

Grundfläche $\quad G = a^2$

$G = (3m)^2 = 9m^2$

Oberfläche $\quad O = G + M$

$O = 9m^2 + 31,3m^2 = 40,3m^3$

Volumen $\quad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3}(3m)^2 \cdot 5m = 15m^3$

$\measuredangle CAS \quad \tan\eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

$\tan\eta = \frac{5m}{\frac{1}{2}4,24m}$

$\eta = 67^\circ$

$\measuredangle SM_1L \quad \tan\epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

$\tan\epsilon = \frac{5m}{\frac{1}{2}3m}$

$\epsilon = 73,3^\circ$

Rechteckige Pyramide

Pythagoras im $\triangle ABC$ $\quad d^2 = a^2 + b^2$

Pythagoras im $\triangle LM_1S$ $\quad h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle LM_2S$ $\quad h_2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $\quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

Mantelfläche $\quad M = 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2}b \cdot h_1$

Grundfläche $\quad G = a \cdot b$

Oberfläche $\quad O = G + M$

Volumen $\quad V = \frac{1}{3}G \cdot h \quad V = \frac{1}{3}a \cdot b \cdot h$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$\measuredangle CAS \quad \tan\eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$\measuredangle SM_1L \quad \tan\epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle ABC$ und der Grundfläche

$\measuredangle SM_2L \quad \tan\mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$

Pythagoras im $\triangle ABC$ $\quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$d = \sqrt{(3m)^2 + (4m)^2} = 5m$

Pythagoras im $\triangle LM_1S$ $\quad h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_1 = \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,22m$

Pythagoras im $\triangle LM_2S$ $\quad h_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_2 = \sqrt{\left(\frac{4m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,39m$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $\quad s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$

$s = \sqrt{\left(\frac{5m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,59m$

Mantelfläche $\quad M = 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2}b \cdot h_1$

$M = 2 \cdot \frac{1}{2}3m \cdot 5,39m + 2 \cdot \frac{1}{2}4m \cdot 5,22m = 37m^2$

Grundfläche $\quad G = a \cdot b$

$G = 3m \cdot 4m = 12m^2$

Oberfläche $\quad O = G + M$

$O = 12m^2 + 37m^2 = 49m^3$

Volumen $\quad V = \frac{1}{3}a \cdot b \cdot h$

$V = \frac{1}{3}3m \cdot 4m \cdot 5m = 20m^3$

$\measuredangle CAS \quad \tan\eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

$\tan\eta = \frac{5m}{\frac{1}{2}5m}$

$\eta = 63,4^\circ$

$\measuredangle SM_1L \quad \tan\epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

$\tan\epsilon = \frac{5m}{\frac{1}{2}3m}$

$\epsilon = 73,3^\circ$

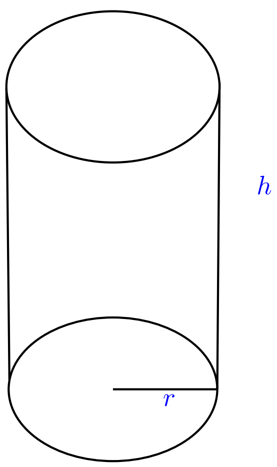
$\measuredangle SM_2L \quad \tan\mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$

$\tan\mu = \frac{5m}{\frac{1}{2}4m}$

$\mu = 68,2^\circ$

Interaktive Inhalte: $V = \frac{1}{3}G \cdot h$ - $G = \frac{3 \cdot V}{h}$ - $h = \frac{3 \cdot V}{G}$ - $O = G + M$ - $G = O - M$ - $M = O - G$ - Rechteckige Pyramide - Quadratische Pyramide -

2.6.5 Kreiszylinder



$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Körperhöhe	h	m	Meter	
Kreiszahl	π			$3,1415927$
Radius	r	m	Meter	
Volumen	V	m^3	Kubikmeter	

$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$

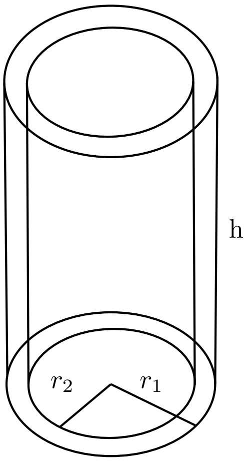
$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$$

Körperhöhe	h	m	Meter	
Kreiszahl	π			$3,1415927$
Radius	r	m	Meter	
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter	

$r = 0,5 \cdot (-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}})$ $\quad h = \frac{0 - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot \pi}$

Interaktive Inhalte: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ - $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ - $h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$ - $O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$ - $r = 0,5 \cdot (-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}})$ - $h = \frac{0 - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot \pi}$ -

2.6.6 Hohlzylinder



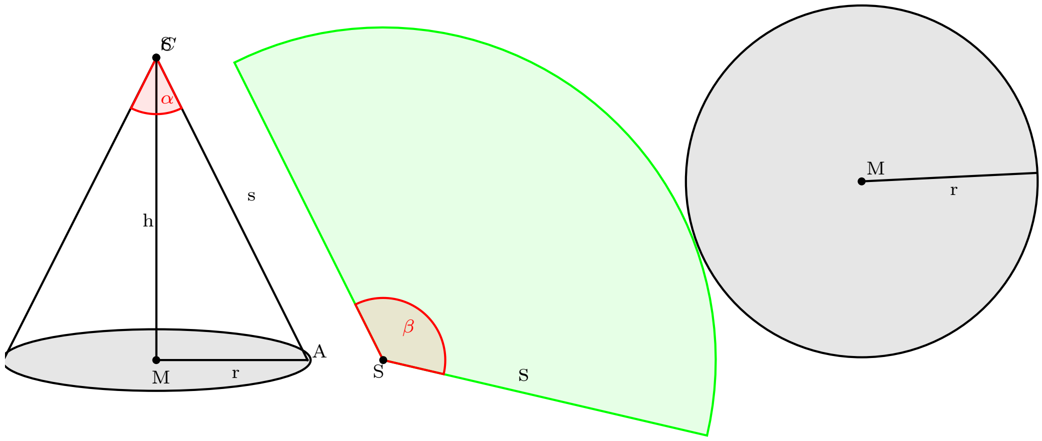
$$V = (r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi \cdot h$$

Körperhöhe	h	m	Meter	
Kreiszahl	π			$3,1415927$
Radius 2	r_2	m	Meter	
Radius 1	r_1	m	Meter	
Volumen	V	m^3	Kubikmeter	

$r_1 = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h} + r_2^2}$ $\quad r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{V}{(r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi}$

Interaktive Inhalte: $V = (r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi \cdot h$ - $r_1 = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h} + r_2^2}$ - $r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{V}{\pi \cdot h}}$ - $h = \frac{V}{(r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi}$ -

2.6.7 Kreiskegel



$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Höhe	h	m	Meter	
Kreiszahl	π			3,1415927
Radius	r	m	Meter	
Volumen	V	m^3	Kubikmeter	

$r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{3 \cdot V}{r^2 \cdot \pi}$

$O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$

Mantellinie	s	m	Meter	
Radius	r	m	Meter	
Kreiszahl	π			3,1415927
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter	

$s = \frac{O}{r \cdot \pi} - r$ $\quad r = \frac{-\pi \cdot s + \sqrt{(\pi \cdot s)^2 + 4 \cdot \pi \cdot O}}{2 \cdot \pi}$

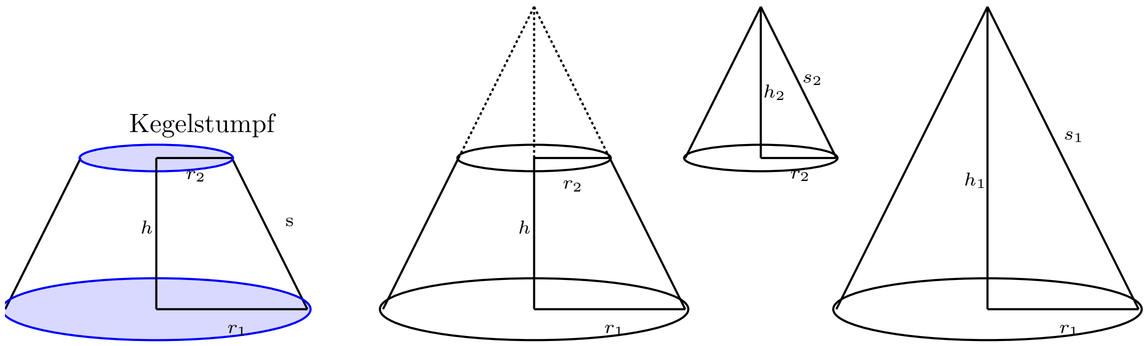
$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

Mantellinie	s	m	Meter
Radius	r	m	Meter
Höhe	h	m	Meter

$r = \sqrt{s^2 - h^2}$ $\quad h = \sqrt{s^2 - r^2}$

Interaktive Inhalte: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ - $r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$ - $h = \frac{3 \cdot V}{r^2 \cdot \pi}$ - $O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$ - $s = \frac{O}{r \cdot \pi} - r$ - $r = \frac{-\pi \cdot s + \sqrt{(\pi \cdot s)^2 + 4 \cdot \pi \cdot O}}{2 \cdot \pi}$ - $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ - $r = \sqrt{s^2 - h^2}$ - $h = \sqrt{s^2 - r^2}$ -

2.6.8 Kegelstumpf



Kegelstumpf

Strahlensatz

$\frac{h_2}{h_1}=\frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_1}=\frac{r_2}{r_1}$
$h_1=h_2+h$	$s_1=s_2+s$
$\frac{h_2}{h_2+h}=\frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_2+s}=\frac{r_2}{r_1}$
$h_2\cdot r_1=r_2\cdot(h_2+h)$	$s_2\cdot r_1=r_2\cdot(s_2+s)$
$h_2\cdot r_1=r_2\cdot h_2+r_2\cdot h$	$s_2\cdot r_1=r_2\cdot s_2+r_2\cdot s$
$h_2\cdot r_1-r_2\cdot h_2=r_2\cdot h$	$s_2\cdot r_1-r_2\cdot s_2=r_2\cdot s$
$h_2\cdot(r_1-r_2)=r_2\cdot h$	$s_2\cdot(r_1-r_2)=r_2\cdot s$
$h_2=\frac{r_2\cdot h}{r_1-r_2}$	$s_2=\frac{r_2\cdot s}{r_1-r_2}$
$h_1=h_2+h$	$s_1=s_2+s$

Pythagoras

$s_2^2=r_2^2+h_2^2 \quad s_1^2=r_1^2+h_1^2$

Mantelfläche $M=r_1\cdot\pi\cdot s_1-r_2\cdot\pi\cdot s_2$

Grund- und Deckfläche $G=r_1^2\pi \quad D=r_2^2\pi$

Oberfläche $O=G+D+M$

Volumen $V=\frac{1}{3}r_1^2\cdot\pi\cdot h_1-\frac{1}{3}r_2^2\cdot\pi\cdot h_2$

$h=5m$
$\pi=3,14$
$r_2=3m$
$r_1=4m$
$h_2=\frac{r_2\cdot h}{r_1-r_2}$
$h_2=\frac{3m\cdot 5m}{4m-3m}=15m$
$h_1=h_2+h$
$h_1=15m+5m$
Pythagoras
$s_2=\sqrt{r_2^2+h_2^2} \quad s_1=\sqrt{r_1^2+h_1^2}$
$s_2=\sqrt{(3m)^2+(15m)^2}=15,3m$
$s_1=\sqrt{(4m)^2+(20m)^2}=20,4m$
Mantelfläche $M=r_1\cdot\pi\cdot s_1-r_2\cdot\pi\cdot s_2$
$M=4m\cdot\pi\cdot 20,4m-3m\cdot\pi\cdot 15,3m=112m^2$
Grund- und Deckfläche $G=r_1^2\pi \quad D=r_2^2\pi$
$G=(4m)^2\pi=50,3m^2$
$D=(3m)^2\pi=28,3m^2$
Oberfläche $O=G+D+M$
$O=50,3m^2+28,3m^2+112m^2=191m^2$
Volumen $V=\frac{1}{3}r_1^2\cdot\pi\cdot h_1-\frac{1}{3}r_2^2\cdot\pi\cdot h_2$
$V=\frac{1}{3}4m^2\cdot\pi\cdot 20m-\frac{1}{3}3m^2\cdot\pi\cdot 15m=194m^3$

Interaktive Inhalte: *Kegelstumpf* -

2.6.9 Kugel

$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$

Kreiszahl	π			$3,1415927$
Radius	r	m	Meter	
Volumen	V	m^3	Kubikmeter	

$r=\sqrt[3]{\frac{V\cdot 3}{4\cdot\pi}}$

$O=4\cdot r^2\cdot\pi$

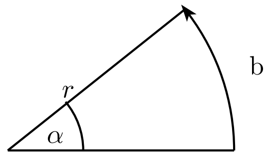
Radius	r	m	Meter	
Kreiszahl	π			$3,1415927$
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter	

$r=\sqrt{\frac{O}{\pi\cdot 4}}$

Interaktive Inhalte: $V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$ - $r=\sqrt[3]{\frac{V\cdot 3}{4\cdot\pi}}$ - $O=4\cdot r^2\cdot\pi$ - $r=\sqrt{\frac{O}{\pi\cdot 4}}$ -

2.7 Trigonometrie

2.7.1 Gradmaß - Bogenmaß



$\alpha(^\circ)$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\alpha(rad)$	0 0	$\frac{1}{6}\pi$ $0,5236$	$\frac{1}{4}\pi$ $0,7854$	$\frac{1}{3}\pi$ $1,0472$	$\frac{1}{2}\pi$ $1,5708$	$\frac{2}{3}\pi$ $2,0944$	$\frac{3}{4}\pi$ $2,3562$	$\frac{5}{6}\pi$ $2,618$	π $3,1416$

$\alpha(^\circ)$	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\alpha(rad)$	$\frac{7}{6}\pi$ $3,6652$	$\frac{5}{4}\pi$ $3,927$	$\frac{4}{3}\pi$ $4,1888$	$\frac{3}{2}\pi$ $4,7124$	$\frac{5}{3}\pi$ $5,236$	$\frac{7}{4}\pi$ $5,4978$	$\frac{11}{6}\pi$ $5,7596$	2π $6,2832$

Definiton Bogenmaß

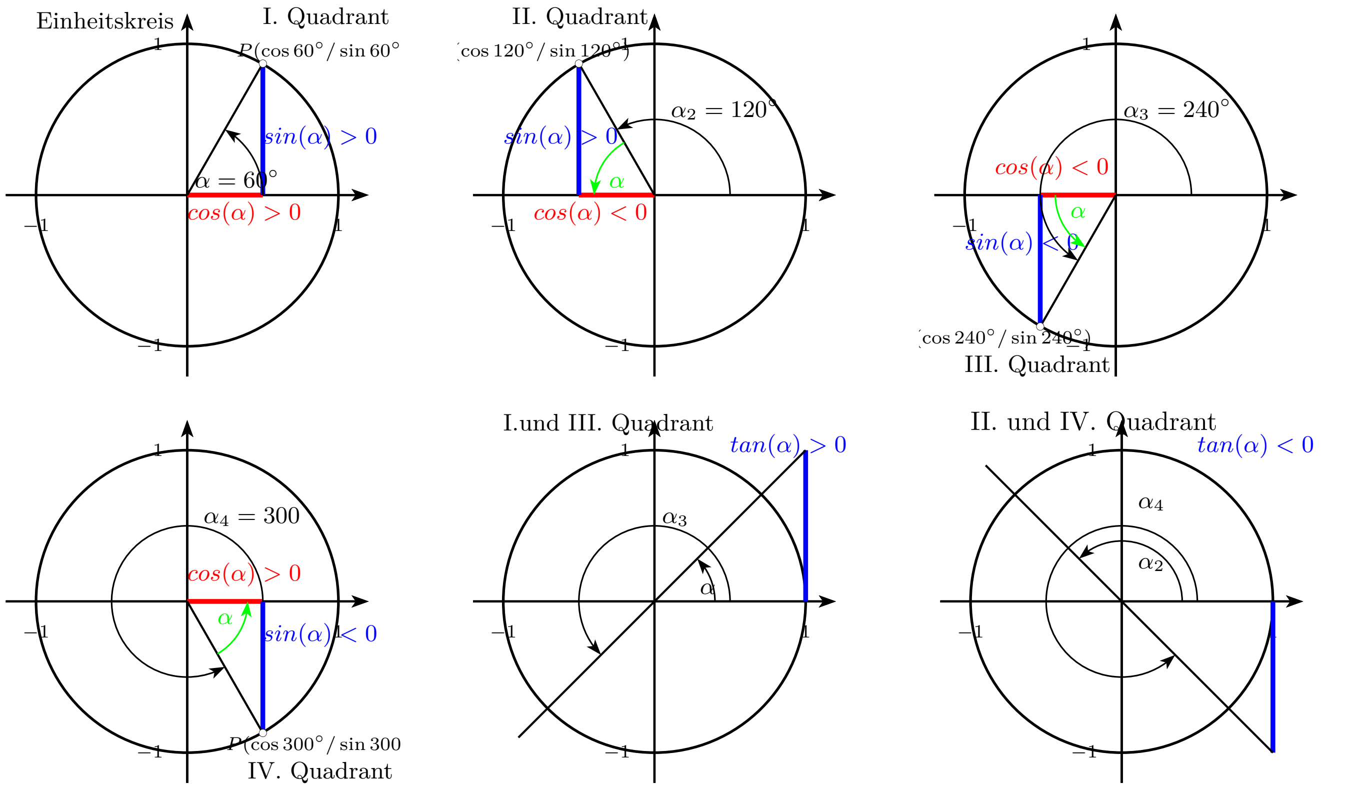
Das Bogenmaß des Winkels ϕ (rad), ist die Länge des Kreisbogens b durch Radius r.
$\phi = \frac{b}{r}$
Ist der Radius r=1 (Einheitskreis), ist das Bogenmaß des Winkels ϕ (rad) die Länge des Kreisbogens b.
$\phi = b$

Umrechung Gradmaß - Bogenmaß

$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot \phi$
$\phi = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$
Kreiszahl π
α in Gradmaß $[^\circ]$
ϕ in Bogemaß $[rad]$

Interaktive Inhalte: $\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$ - $x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$ -

2.7.2 Definition



$\alpha(^\circ)$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\alpha(rad)$	0°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Definition

Punkt auf dem Einheitskreis:

$P(cos\alpha/sin\alpha)$

Steigung :

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = m$$

I. Quadrant: $\alpha = 60^\circ$

$\cos(60^\circ) = \dfrac{1}{2}$

$\sin(60^\circ) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(45^\circ) = 1$

II. Quadrant: $\alpha_2 = 120^\circ$

$\cos(120^\circ) = \dfrac{1}{2}$

$\sin(120^\circ) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(135^\circ) = -1$

III. Quadrant: $\alpha_3 = 240^\circ$

$\cos(210^\circ) - \dfrac{1}{2}$

$\sin(210^\circ) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(225^\circ) = 1$

IV Quadrant: $\alpha_4 = 300^\circ$

$\cos(300^\circ) = -\dfrac{1}{2}$

$\sin(300^\circ) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(315^\circ) = -1$

Komplementwinkel

$sin(90^\circ - \alpha) = cos(\alpha)$

$cos(90^\circ - \alpha) = sin(\alpha)$

$sin(90^\circ - 30^\circ) = sin(60^\circ) = cos(30^\circ)$

$cos(90^\circ - 30^\circ) = cos(60^\circ) = sin(30^\circ)$

Negative Winkel

$sin(-\alpha) = -sin(\alpha)$
$cos(-\alpha) = cos(\alpha)$
$tan(-\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$

$sin(-30°) = -sin(30°)$
$cos(-30°) = cos(30°)$
$tan(-30°) = \frac{1}{tan(30°)}$

Interaktive Inhalte: $\sin\alpha - \cos\alpha \tan\ alpha$ - $\sin\alpha = y$ - $\cos\alpha = x$ - $\tan\alpha = m$ -

2.7.3 Quadrantenregel

α in Gradmaß

I. Quadrant $0° < \alpha < 90°$
$\sin(\alpha) > 0$ $\cos(\alpha) > 0$ $\tan(\alpha) > 0$
II. Quadrant $90° < \alpha_2 < 180°$
$\sin(\alpha_2) > 0$ $\cos(\alpha_2) < 0$ $\tan(\alpha_2) < 0$
$\alpha_2 = 180° - \alpha$
$sin(180° - \alpha) = sin(\alpha)$
$cos(180° - \alpha) = -cos(\alpha)$
$tan(180° - \alpha) = -tan(\alpha)$
III. Quadrant $180° < \alpha_3 < 270°$
$\sin(\alpha_3) < 0$ $\cos(\alpha_3) < 0$ $\tan(\alpha_3) > 0$
$\alpha_3 = 180° + \alpha$
$sin(180° + \alpha) = -sin(\alpha)$
$cos(180° + \alpha) = -cos(\alpha)$
$tan(180° + \alpha) = tan(\alpha)$
IV. Quadrant $270° < \alpha_4 < 360°$
$\sin(\alpha_4) < 0$ $\cos(\alpha_4) > 0$ $\tan(\alpha_4) < 0$
$\alpha_4 = 360° - \alpha$
$sin(360° - \alpha) = -sin(\alpha)$
$cos(360° - \alpha) = cos(\alpha)$
$tan(360° - \alpha) = -tan(\alpha)$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$
I Quadrant: $\alpha_1 = 30°$
II Quadrant: $\alpha_2 = 180° - 30° = 150°$
$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$
III Quadrant: $\alpha_1 = 180° + 30° = 210°$
IV Quadrant: $\alpha_2 = 360° - 30° = 330°$
$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
I Quadrant: $\alpha_1 = 45°$
IV Quadrant: $\alpha_2 = 360° - 45° = 315°$
$\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
II Quadrant: $\alpha_1 = 180° - 45° = 135°$
III Quadrant: $\alpha_2 = 180° + 45° = 225°$

α in Bogenmaß

I. Quadrant $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\sin(\alpha) > 0$ $\cos(\alpha) > 0$ $\tan(\alpha) > 0$

II. Quadrant $\frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$

$\sin(\alpha_2) > 0$ $\cos(\alpha_2) < 0$ $\tan(\alpha_2) < 0$

$\alpha_2 = \pi - \alpha$

$sin(\pi - \alpha) = sin(\alpha)$

$cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$

$tan(\pi - \alpha) = -tan(\alpha)$

III. Quadrant $\pi < \alpha_3 < \frac{3\pi}{2}$

$\sin(\alpha_3) < 0$ $\cos(\alpha_3) < 0$ $\tan(\alpha_3) > 0$

$\alpha_3 = \pi + \alpha$

$sin(\pi + \alpha) = -sin(\alpha)$

$cos(\pi + \alpha) = -cos(\alpha)$

$tan(\pi + \alpha) = tan(\alpha)$

IV. Quadrant $\frac{3\pi}{2} < \alpha_4 < 2\pi$

$\sin(\alpha_4) < 0$ $\cos(\alpha_4) > 0$ $\tan(\alpha_4) < 0$

$\alpha_4 = 2\pi - \alpha$

$sin(2\pi - \alpha) = -sin(\alpha)$

$cos(2\pi - \alpha) = cos(\alpha)$

$tan(2\pi - \alpha) = -tan(\alpha)$

Interaktive Inhalte: $\sin\alpha - \cos\alpha \tan\ alpha$ - $\sin\alpha = y$ - $\cos\alpha = x$ - $\tan\alpha = m$ -

2.7.4 Umrechnungen

tan - sin - cos

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

sin - cos

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$

$cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$

Additionstheoreme

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$

$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$

$tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$

$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$

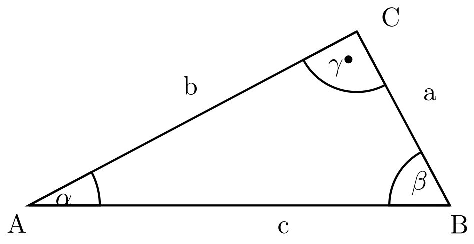
$sin2\alpha = 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha$

$cos2\alpha = 2 \cdot cos^2\alpha - 1 = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$tan2\alpha = \frac{2 \cdot tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$

Interaktive Inhalte: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ - $sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$ - $cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$ - $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ - $sin\alpha = tan\alpha \cdot cos\alpha$ - $cos\alpha = \frac{sin\alpha}{tan\alpha}$ -

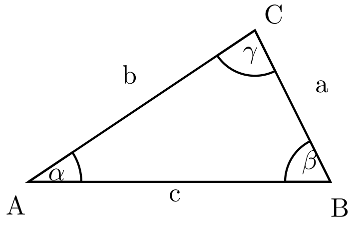
2.7.5 Rechtwinkliges Dreieck



$sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$	Hypotenuse c m Meter Gegenkathete zu α a m Meter Winkel α $^\circ$ Grad $a = sin\alpha \cdot c$ $\quad c = \frac{a}{sin\alpha}$
$cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$	Hypotenuse c m Meter Ankathete zu α b m Meter Winkel α $^\circ$ Grad $b = cos\alpha \cdot c$ $\quad c = \frac{b}{cos\alpha}$
$tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$	Ankathete zu α b m Meter Gegenkathete zu α a m Meter Winkel α $^\circ$ Grad $a = tan\alpha \cdot b$ $\quad b = \frac{a}{tan\alpha}$

Interaktive Inhalte: $sin\alpha = \frac{a}{c}$ - $a = sin\alpha \cdot c$ - $c = \frac{a}{sin\alpha}$ - $cos\alpha = \frac{b}{c}$ - $b = cos\alpha \cdot c$ - $c = \frac{b}{cos\alpha}$ - $tan\alpha = \frac{a}{b}$ - $a = tan\alpha \cdot b$ - $b = \frac{a}{tan\alpha}$ -

2.7.6 Sinussatz



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\beta \qquad / \cdot \sin\alpha$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \qquad / : b$$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\alpha$$

$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b} \qquad \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \qquad \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c}$$

$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a} \qquad \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b}$$

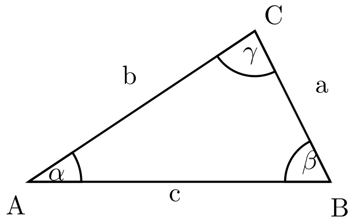
$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \qquad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \qquad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$$

Interaktive Inhalte: $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$ - $a = \frac{b \cdot sin\alpha}{sin\beta}$ - $sin\alpha = \frac{a \cdot sin\beta}{b}$ -

2.7.7 Kosinussatz



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2$$

$$0 = b^2 + c^2 - a^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Interaktive Inhalte: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$ - $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha}$ - $cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c}$ -

2.7.8 Kongruenzsätze - Berechnungen am Dreieck

Seite - Seite - Seite (SSS)

Seite	Seite	Seite
a	b	c

1. Zwei Winkel mit Kosinus-Satz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2 \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$

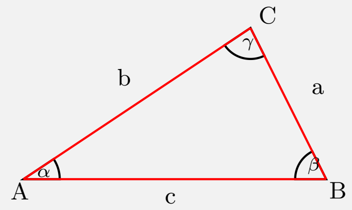
$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

entsprechend

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



$a = 2,2 \quad b = 3,6 \quad c = 4$

$\cos\alpha = \frac{3,6^2 + 4^2 - 2,2^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4}$

$\cos\alpha = 0,8$

$\alpha = \arccos(0,8)$

$\alpha = 33,1°$

$\cos\beta = \frac{2,2^2 + 4^2 - 3,6^2}{2 \cdot 2,2 \cdot 4}$

$\cos\beta = 0,4$

$\beta = \arccos(0,4)$

$\beta = 63,4°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

Seite - Winkel - Seite (SWS)

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c

1. Gegenüberliegende Seite mit Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

entsprechend

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$

2. Winkel mit Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2 \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$

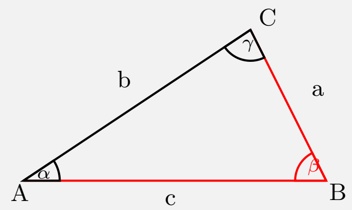
$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

entsprechend

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

3. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



$a = 2,2 \quad c = 4 \quad \beta = 63,4°$

$b = \sqrt{2,2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 4 \cdot \cos 63,4°}$

$b = 3,6$

$\cos\alpha = \frac{3,6^2 + 4^2 - 2,2^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4}$

$\cos\alpha = 0,8$

$\alpha = \arccos(0,8)$

$\alpha = 33,1°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

Winkel - Seite - Winkel (WSW,WWS)

Winkel	Seite	Winkel
α	c	β
α	b	γ
β	a	γ

Winkel	Winkel	Seite
α	β	a
α	β	b
α	γ	a
α	γ	c
β	γ	b
β	γ	c

1. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

2. Eine Seite über den Sinussatz

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\beta$

$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$

entsprechend

$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \qquad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$

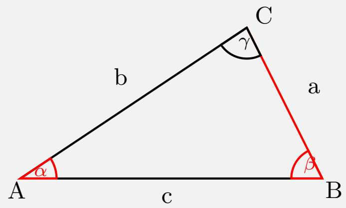
3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

entsprechend

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$



$a = 2,2 \quad \alpha = 33,1° \quad \beta = 63,4°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

$b = \frac{2,2 \cdot \sin 63,4}{\sin 33,1}$

$b = 3,6$

$c = \sqrt{2,2^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 3,6 \cdot \cos 83,5°}$

$c = 4$

Seite - Seite - Winkel (SsW)

Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	a>b
a	b	β	b>a
a	c	α	a>c
a	c	γ	c>a
b	c	β	b>c
b	c	γ	c>b

1. Winkel mit dem Sinussatz berechnen

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\beta \qquad / \cdot \sin\alpha$

$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \qquad / : b$

$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b}$

entsprechend

$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \qquad \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a}$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

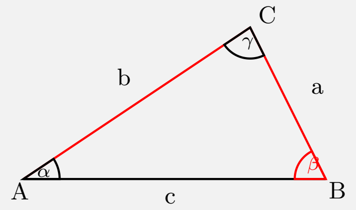
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

entsprechend

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$



$a = 2,2 \quad b = 3,6 \quad \beta = 63,4°$

$\sin\alpha = \frac{2,2 \cdot \sin 63,4°}{3,6}$

$\sin\alpha = 0,5$

$\alpha = \arcsin(0,5)$

$\alpha = 33,1°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

$c = \sqrt{2,2^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 3,6 \cdot \cos 83,5°}$

$c = 4$

Interaktive Inhalte: hier klicken

3 Funktionen

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definition

Jedem Element x aus der Definitionsmenge D wird genau ein Element y aus der Wertemenge W zugeordnet.
x - unabhängige Variable
y - abhängige Variable
Zu jeder Funktion gehört ein Definitionsbereich.

Ein Tafel Schokolade kostet 2,- Euro.
Wieviel kosten 1, 2, 3, 4, 5 Tafeln ?
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

$\mathbb{D} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
$\mathbb{W} = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
Funktionsgleichung: $y = 2 \cdot x$

x	1	2	3	4	4
y	2	4	6	8	10

keine eindeutige Zordnung $\Rightarrow$ keine Funktion

Schreibweise

$y = f(x)$ - Funktionsgleichung, Funktion
$f(x)$ - Funktionsterm
$f : x \mapsto y$ x-Werte werden auf y-Werte abgebildet
$f : x \mapsto f(x)$ x-Werte werden auf f(x) abgebildet

$y = 2 \cdot x$
$f(x) = 2 \cdot x$
$f : x \mapsto 2 \cdot x$

Definitions- und Wertebereich

• Definitionsbereich
Zahlenbereich der für x (unabhängige Variable) eingesetzt werden darf.
Einschränkungen des Definitionsbereichs sind nötig bei:
• Textaufgaben, bei denen nur bestimmte x-Wert möglich sind.
• Bruchfunktionen: Division durch Null ist nicht erlaubt. (Nenner $\neq 0$)
• Wurzelfunktionen: unter der Wurzel (Radikant) dürfen keine negativen Zahlen stehen. (Radikant ≥ 0)
•Logarithmusfunktionen: das Argument muss positiv sein. (Argument > 0)

• Wertebereich
Zahlenbereich den y (abhängige Variable Funktionswert) annehmen kann.

$y = (x+3)^{-1} + 1 = \frac{1}{x+3} + 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$y = \log_3(x) \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

3.1.2 Umkehrfunktion

Definition

Jedem Element y aus der Wertemenge W wird genau ein Element x aus der Definitionsmenge D zugeordnet.
y - unabhängige Variable
x - abhängige Variable
Funktionen sind umkehrbar, wenn sie im Definitionsbereich streng monoton steigen oder streng monoton fallen.

Schreibweise

$x = f^{-1}(y)$ - Umkehrfunktion
$f : y \mapsto x$ y-Werte werden auf x-Werte abgebildet
Nach dem Vertauschen der Variablen:
$y = f^{-1}(x)$ - Umkehrfunktion

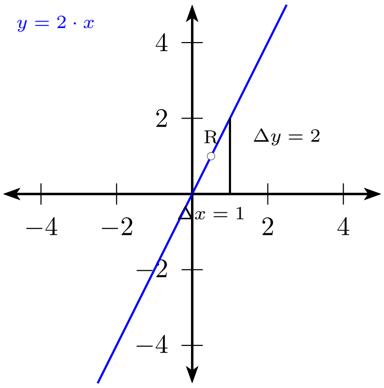
Ermittlen der Umkehrfunktion

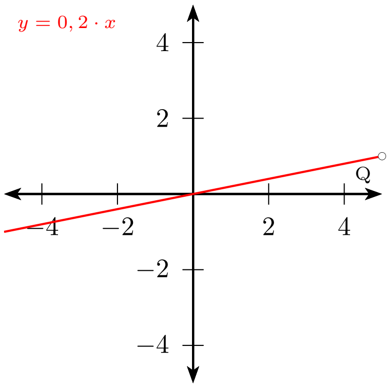
Graphisch: Funktionsgraph an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln.
Algebraisch: Funktionsgleichung nach x auflösen und die Variablen x und y vertauschen.

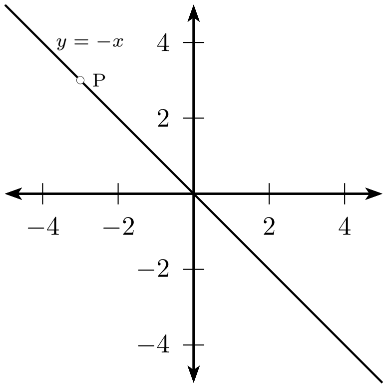
$y = 2 \cdot x - 3$ /+3 /:2
$\frac{y+3}{2} = x$
$\frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2} = x$
$x = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$
$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$
Vertauschen der Variablen:
$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$
$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$

3.2 Lineare Funktion

3.2.1 Ursprungsgerade







Ursprungsgerade

$y = m \cdot x$

Steigung-Proportionalitätsfaktor: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ $y = 0$ entspricht der x-Achse

$m < 0$ fallend

Winkelhalbierende des I und III Quadranten: $y = x$

Winkelhalbierende des II und IV Quadranten: $y = -x$

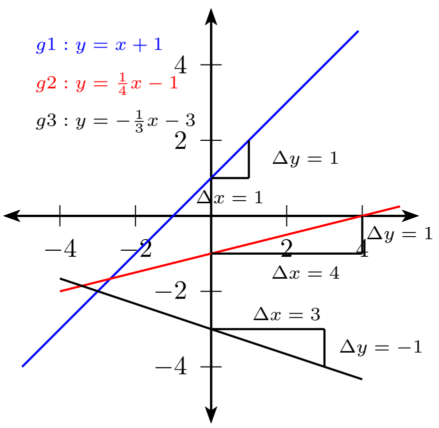
$y = m \cdot x$
$y = 2 \cdot x \quad m = 2$
$R(\frac{1}{2}/y) \quad x = \frac{1}{2}$
$y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad R(\frac{1}{2}/1)$

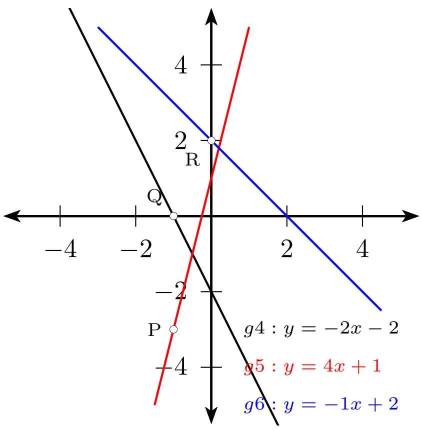
$m = \frac{y}{x}$
$Q(5/1) \quad y = 1 \quad x = 5$
$m = \frac{1}{5} \quad y = \frac{1}{5}x$

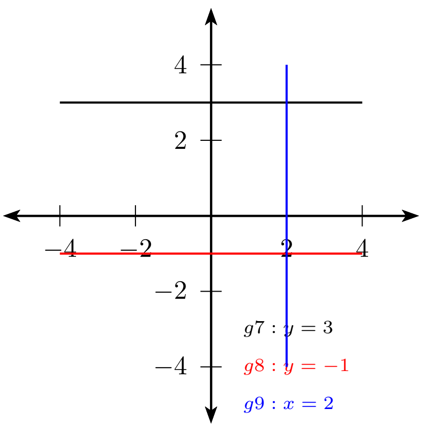
$x = \frac{y}{m}$
$P(x/3) \quad y = -1 \cdot x$
$m = -1 \quad y = 3$
$3 = -1 \cdot x$
$x = -3 \quad P(-3/3)$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - $y = m \cdot x$ - $x = \frac{y}{m}$ - $m = \frac{y}{x}$ -

3.2.2 Graph und Eigenschaften







Gerade - lineare Funktion

$y = m \cdot x + t \qquad f(x) = m \cdot x + t \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ parallel zur x-Achse

$m < 0$ fallend

y-Achsenabschnitt: t

Besondere Geraden:

$y = 0$ x-Achse

$y = t$ Parallele zur x-Achse im Abstand t

$x = 0$ y-Achse

$x = k$ Parallele zur y-Achse im Abstand k

$g1 : y = x + 1$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$

$m > 0$ steigend

y-Achsenabschnitt: $t = 1$

$g2 : y = \frac{1}{4}x - 1$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$

$m > 0$ steigend

y-Achsenabschnitt: $t = -1$

$g3 : y = -\frac{1}{3}x - 3$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$

$m < 0$ fallend

y-Achsenabschnitt: $t = -3$

$g5 : y = 4x + 1$

Steigung: $m = 4$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1}$

y-Achsenabschnitt: $t = 1$

$P(-1/y) \quad x = 1$

$y = 4 \cdot (-1) + 1$

$y = -1 \quad P(-1/-3)$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstelle

$y = mx + t$

$y = 0 \qquad mx + t = 0$

$x = \frac{-t}{m}$

$g4 : y = -2x - 2$

$0 = -2x - 2 \qquad / + 2$

$2 = -2x \qquad / : (-2)$

$x = -1 \quad Q(-1/0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$x = 0 \qquad y = m \cdot 0 + t$

$y = m \cdot 0 + t$

$y = t$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$g5 : y = -x + 2$

$y = -1 \cdot 0 + 2$

$y = 2$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	+	0	−

+ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

$g5 : y = 4x + 1 = 0$

$4x + 1 = 0 \qquad / - 1$

$4x = -1 \qquad / : 4$

$x = \frac{-1}{4}$

Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $x = -1$

$g5 : y = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$

Minuszeichen eintragen

Wert größer als die Nullstelle wählen: $x = 0$

$g5 : y = 4 \cdot (0) + 1 = +1$

Pluszeichen eintragen

Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{4}$	$< x$
$f(x)$	−	0	+

+ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

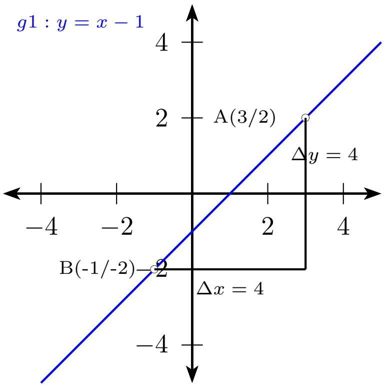
$4x + 1 > 0$ für $\underline{x \in]-\frac{1}{4}; \infty[}$

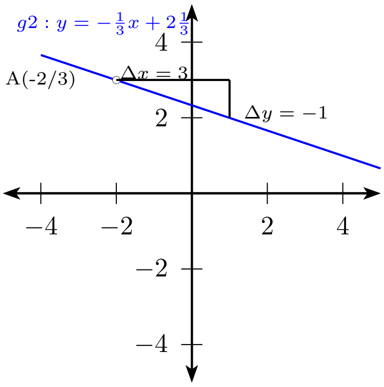
− $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

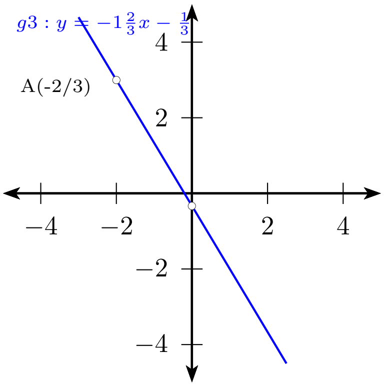
$4x + 1 < 0$ für $\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{4}[}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Eigenschaften - $y = m \cdot x + t$ - $m = \frac{y-t}{x}$ - $x = \frac{y-t}{m}$ - $t = y - m \cdot x$ -

3.2.3 Geradengleichung aufstellen







Gerade durch 2 Punkte

$y = m \cdot x + t$
$A(xa/ya) \qquad B(xb/yb)$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ya - yb}{xa - xb}$
$t = ya - m \cdot xa$

$A(3/2) \qquad B(-1/-2)$
$m = \frac{2+2}{3+1}$
$m = 1$
$2 = 1 \cdot 3 + t$
$2 = 3 + t \qquad / - 3$
$t = 2 - 3$
$t = -1$
$g_1: y = x - 1$

Gerade durch den Punkt A mit der Steiung m

$y = m \cdot x + t$
$A(xa/ya)$ Steigung: m
$t = ya - m \cdot xa$

$A(-2/3) \qquad m = -\frac{1}{3}$
$3 = -\frac{1}{3} \cdot (-2) + t$
$3 = \frac{2}{3} + t \qquad / - \frac{2}{3}$
$t = 3 - \frac{2}{3}$
$t = 2\frac{1}{3}$
$g_2: y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

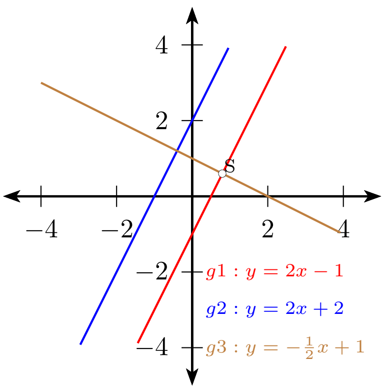
Gerade durch den Punkt A und dem y-Achsenabschnitt t

$A(xa/ya)$ y-Achsenabschnitt: t
$m = \frac{ya-t}{xa}$

$A(-2/3) \qquad t = -\frac{1}{3}$
$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3}$
$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3} \qquad / + \frac{1}{3}$
$3 + \frac{1}{3} = m \cdot (-2) \qquad / : -2$
$m = -1\frac{2}{3}$
$g_3: y = -1\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Interaktive Inhalte: 2 Punkte - Punkt und Steigung - Punkt und y-Achsenabschnitt -

3.2.4 Gerade - Gerade



Parallele Geraden

$g1: y = m_1x + t_1 \qquad g2: y = m_2x + t_2$

$m_1 = m_2 \Rightarrow g1 \parallel g2$

$g1: y = 2x - 1 \quad g2: y = 2x + 2$
$m_1 = m_2$
$2 = 2$
$\Rightarrow g1 \parallel g2$

Senkrechte Geraden

$g1: y = m_1x + t_1 \qquad g3: y = m_3x + t_3$

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow g1 \perp g3$

$g1: y = 2x - 1 \quad g3: y = -\frac{1}{2}x + 1$
$m_1 \cdot m_2 = -1$
$2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$
$\Rightarrow g1 \perp g3$

Schnittpunkt zweier Geraden

$g1: y = m_1x + t_1 \qquad g3: y = m_3x + t_3$

- Terme gleichsetzen:

$m_1x + t_1 = m_2x + t_2$

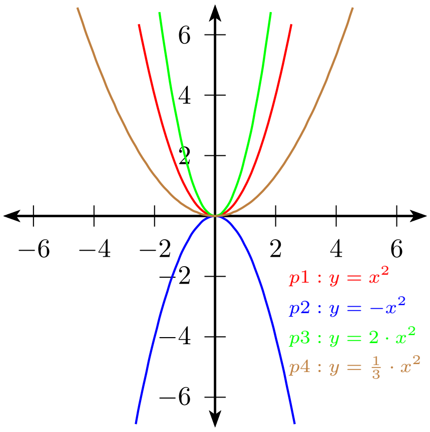
- x-Wert durch umformen berechnen
- x-Wert in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

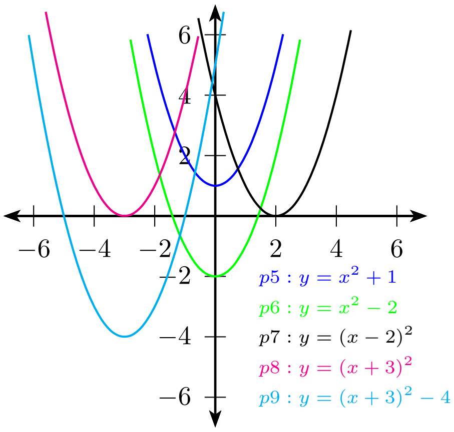
$g_1: y = 2x - 1 \qquad g_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$
$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$
$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \qquad / + \frac{1}{2}x$
$2\frac{1}{2}x - 1 = 1 \qquad / + 1$
$2\frac{1}{2}x = 2 \qquad / : 2\frac{1}{2}$
$x = \frac{4}{5}$
$g_1: y = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1$
$S(\frac{4}{5}/\frac{3}{5})$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - $y = m_1x + t_1 \qquad y = m_2x + t_2$ -

3.3 Quadratische Funktion

3.3.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Parabelgleichung

Normalparabel	$y = x^2$
Allgemeine Form	$y = ax^2 + bx + c$
Scheitelform	$y = a(x - xs)^2 + ys$
faktorisierte Form	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
a	Formfaktor
$a > 0$	nach oben geöffnet
$a < 0$	nach unten geöffnet
$\|a\| > 1$	gestreckt
$\|a\| < 1$	gestaucht
x_s	Verschiebung in x-Richtung
y_s	Verschiebung in y-Richtung
$S(x_s/y_s)$	Scheitelkoordinaten
x_1, x_2	Nullstellen

$p1 : y = x^2$ $S(0/0)$ Normalparabel nach oben geöffnet
$p2 : y = -x^2$ $S(0/0)$ Normalparabel nach unten geöffnet
$p3 : y = 2x^2$ $S(0/0)$ $a = 2$ gestreckt
$p4 : y = \frac{1}{3}x^2$ $S(0/0)$ $a = \frac{1}{3}$ gestaucht
$p5 : y = x^2 + 1$ $S(0/1)$ 1 nach oben verschoben
$p6 : y = x^2 - 2$ $S(0/-2)$ 2 nach unten verschoben
$p7 : y = (x - 2)^2$ $S(2/0)$ 2 nach rechts verschoben
$p8 : y = (x + 3)^2$ $S(-3/0)$ 3 nach links verschoben
$p9 : y = (x+3)^2 - 4$ $S(-3/-4)$ 3 nach links verschoben und 4 nach unten verschoben

Definitions- und Wertebreich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$a > 0$ $\mathbb{W} = [$y-Wert des Scheitels$; \infty[$
$a < 0$ $\mathbb{W} =]-\infty;$ y-Wert des Scheitels$]$

$p2 : y = -x^2$ $S(0/0)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty; 0]$
$p9 : y = (x + 3)^2 - 4$ $S(-3/-4)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-4; \infty[$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstellen

$y = ax^2 + bx + c$

$y = 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ eine Nullstelle

$D > 0$ zwei Nullstellen

$D < 0$ keine Nullstelle

$p9 : y = x^2 + 6x + 5 = 0$

$1x^2 + 6x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4}{2}$

$x_1 = \dfrac{-6 + 4}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-6 - 4}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -5$

$D > 0 \Rightarrow$ zwei Nullstellen

$p9 : y = x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$

$p5 : y = x^2 + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$D < 0 \Rightarrow$ keine Nullstelle

$p8 : y = x^2 + 6x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm 0}{2}$

$x_{1/2} = -3$

$D = 0 \Rightarrow$ eine Nullstellen

Schnittpunkt mit der y-Achse

$p : y = ax^2 + bx + c$

$x = 0 \qquad p : y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$p(x) = c \qquad Q(0/c)$

$p9 : y = x^2 + 6x + 5$

$y = 0^2 + 6 \cdot 0 + 5$

$y = 5 \qquad Q(0/5)$

Allgemeine Form in Scheitelform

Allgemeine Form

$y = ax^2 + bx + c$

Scheitelform

$y = a(x - xs)^2 + ys$

Quadratische Ergänzung:

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$

$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$

$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$

$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$

$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$x_s = -\frac{b}{2 \cdot a}$

$y_s = c - \frac{b^2}{4 \cdot a}$

Scheitelformel:

$S(x_s/y_s)$

$S(-\frac{b}{2 \cdot a}/c - \frac{b^2}{4 \cdot a})$

quadratische Ergänzung

$p9 : y = x^2 + 6x + 5$

$p9 : y = (x^2 + 6x + 5)$

$p9 : y = (x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 5)$

$p9 : y = [(x + 3)^2 - 3^2 + 5]$

$p9 : y = [(x + 3)^2 - 9 + 5]$

$p9 : y = [(x + 3)^2 - 4]$

$p9 : y = (x + 3)^2 - 4$

Scheitel(-3/-4)

Scheitelformel

$y = x^2 + 6x + 5$

$xs = -\frac{6}{2 \cdot 1}$

$xs = -3$

$ys = 5 - \frac{6^2}{4 \cdot 1}$

$ys = -4$

$Scheitel(-3/-4)$

$p9 : y = (x + 3)^2 - 4$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ - *Eigenschaften* -

3.3.2 Parabelgleichung aufstellen und umformen

Parabelgleichung aus 2 Punkten und dem Formfaktor

Gegeben: Formfaktor a und Punkte $A(x_a/y_a)$ und $B(x_b/y_b)$

• Formfaktor a und Punkt $A(x_a/y_a)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$y_a = ax_a^2 + bx_a + c$

• Formfaktor a und Punkt $B(x_b/y_b)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$y_b = ax_b^2 + bx_b + c$

siehe Lösung von linearen Gleichungssystemen

$a = -2 \qquad A(2/-1) \qquad B(-1/4)$

Formfaktor a einsetzen:

$y = -2x^2 + bx + c$

I)Punkt A einsetzen

$-1 = -2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

$-1 = -8 + 2b + c \qquad /+8 \quad /-2b$

$-1 + 8 - 2b = c$

$7 - 2b = c$

II)Punkt B einsetzen

$4 = -2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$

$4 = -2 - 1b + c$

I in II

$4 = -2 - 1b + 7 - 2b$

$4 = 5 - 3b \qquad /-5 \qquad /:(-3)$

$b = \frac{4-5}{-3}$

$b = \frac{1}{3}$

$c = 7 - 2 \cdot \frac{1}{3}$

$c = 6\frac{1}{3}$

$y = -2x^2 + \frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$

Parabelgleichung aus Formfaktor und dem Scheitel

Formfaktor a und Scheitel in Scheitelform einsetzen:

$y = a(x - xs)^2 + ys$

Binomische Formel auflösen:

$y = a(x^2 - 2 \cdot x \cdot xs + xs^2) + ys$

$y = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot xs + a \cdot xs^2 + ys$

Formfaktor: $a = -\frac{1}{2} \qquad S(2/-3)$

$y = a(x - xs)^2 + ys$

$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$

$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2^2) - 3$

$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5$

Parabelgleichung aus einem Punkt und dem Scheitel

Punkt $A(x_a/y_a)$ und Scheitel $S(x_s/y_s)$in die Scheitelform einsetzen und nach a auflösen. $y_a = a(x_a - xs)^2 + ys$

$A(2/-4) \qquad S(1/2)$

$y = a(x - xs)^2 + ys$

$-4 = a(2-1)^2 + 2$

$-4 = 1 \cdot a + 2 \qquad /-2 \qquad /:1$

$a = \frac{-4-2}{1}$

$a = -6$

$y = -6(x-1)^2 + 2$

$y = -6(x^2 - 2x + 1^2) + 2$

$y = -6x^2 - 12x - 4$

Parabelgleichung aus Formfaktor und Nullstellen

Formfaktor a und Nullstellen in die faktorisierte Form einsetzen

$P(x_1/0) \qquad Q(x_2/0) \qquad a$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$

$y = ax^2 - a \cdot x_1 \cdot x - a \cdot x_2 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$

Nullstellen$x_1 = 1 \qquad x_2 = -4 \qquad a = 7$

$P(1/0) \qquad Q(-4/0) \qquad a = 7$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = 7(x-1)(x+4)$

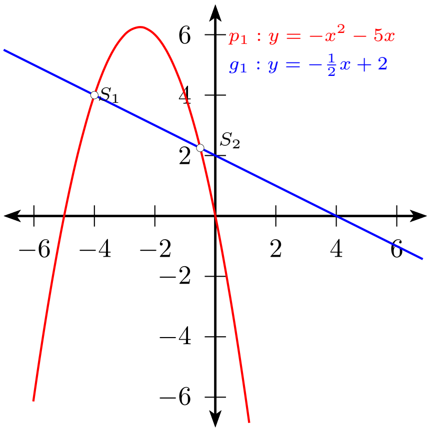
$y = 7(x^2 + 4x - 1x - 4)$

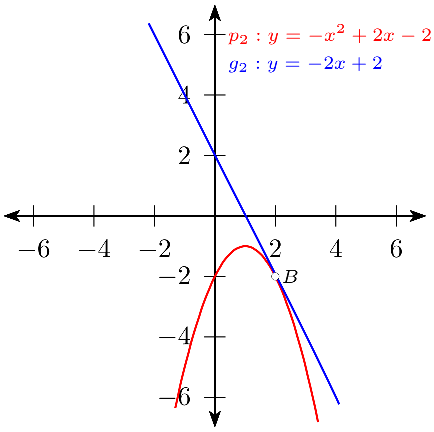
$y = 7(x^2 + 3x - 4)$

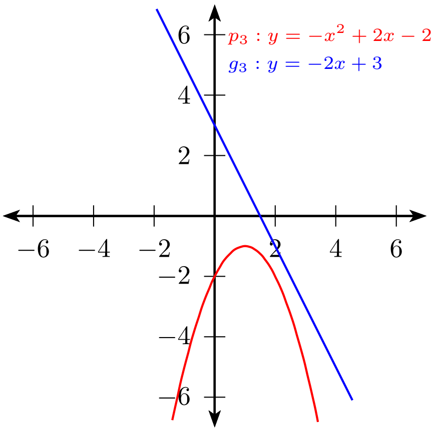
$y = 7x^2 - 21x - 28$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - 2 Punkte und Formfaktor - Scheitel und Formfaktor - Scheitel und Punkt - Nullstellen - Faktorisierte Form -

3.3.3 Parabel - Gerade







$p : y = ax^2 + bx + c \qquad g : y = mx + t$

Terme gleichsetzen: $ax^2 + bx + c = mx + t$

Term nach Null umformen: $ax^2 + (b - m)x + c - t = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Diskriminante:

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührpunkt

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$p_1 : y = -x^2 - 5x \qquad g_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$

$-1x^2 - 5x = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad / + \frac{1}{2}x / - 2$

$-1x^2 - 5x + \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$-1x^2 - 4\frac{1}{2}x - 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-4\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$

$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}}}{-2}$

$x_{1/2} = \frac{4\frac{1}{2} \pm 3\frac{1}{2}}{-2}$

$x_1 = \frac{4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}}{-2}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$y = -1(-4)^2 - 5(-4) = 4 \qquad S_1(-4/4)$

$y = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + 2 = 2\frac{1}{4} \qquad S_2(-\frac{1}{2}/2\frac{1}{4})$

$p_2 : y = -x^2 + 2x - 2 \qquad g_2 : y = -2x + 2$

$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 2$

$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 2) = 0$

$-x^2 + 4x - 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2} \qquad = \frac{-4 \pm 0}{-2}$

$x_{1/2} = \frac{-4 + 0}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 0}{-2}$

$x_{1/2} = 2$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührpunkt

$y = -2$

$B(2/-2)$

$p_3 : y = -x^2 + 2x - 2 \qquad g_3 : y = -2x + 3$

$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 3$

$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 3) = 0$

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

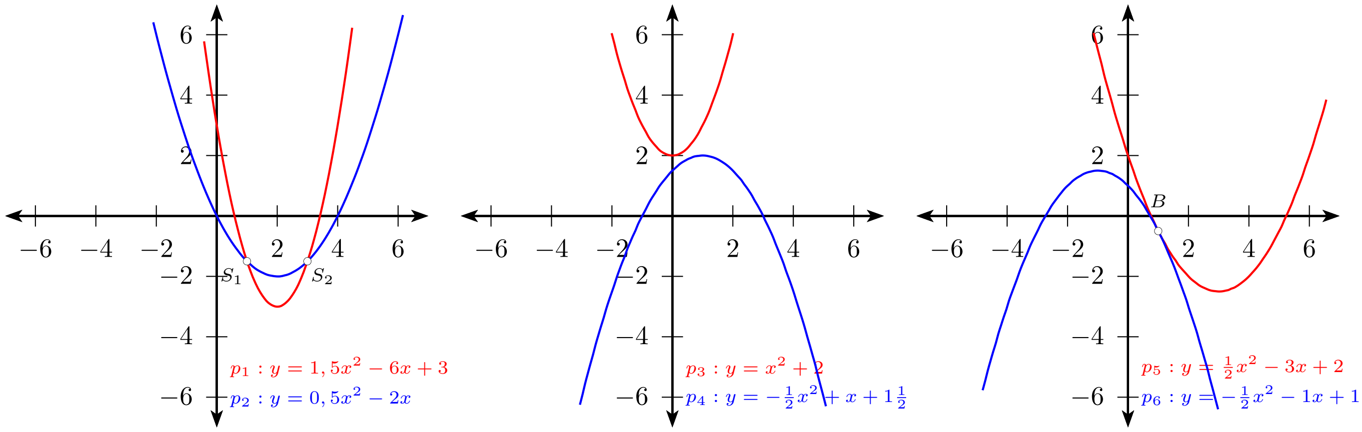
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)}$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$

$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Parabel-Gerade -

3.3.4 Parabel - Parabel



$p_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1$

$p_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Terme gleichsetzen:

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Term nach Null umformen:

$ax^2 + bx + c = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ Berührpunkt

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$D < 0$keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$p_1 : y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 \qquad p_2 : y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 - (\frac{1}{2}x^2 - 2x) = 0$

$1x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} \qquad x_2 = \frac{4-2}{2}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$y = 1\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -1\frac{1}{2} \qquad S_1(3/ - 1\frac{1}{2})$

$y = 1\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -1\frac{1}{2} \qquad S_2(1/ - 1\frac{1}{2})$

$p_3 : y = x^2 + 2 \qquad p_4 : y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$

$x^2 + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}) = 0$

$1\frac{1}{2}x^2 - 1x + \frac{1}{2} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-2}}{3}$$

$D < 0$ keinen Schnittpunkt

$p_5 : y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \qquad p_6 : y = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$

$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1) = 0$

$1x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+0}{2} \qquad x_2 = \frac{2-0}{2}$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1$

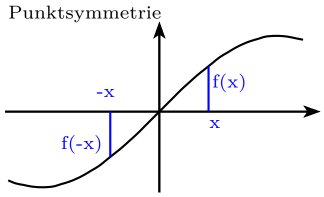
$D = 0$ Berührpunkt

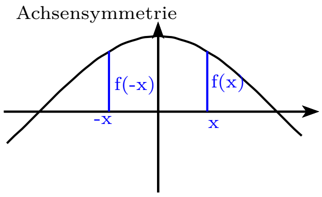
$B(1/ - \frac{1}{2})$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Parabel-Parabel -

3.4 Eigenschaften von Funktionen

3.4.1 Symmetrie





Punktsymmetrie zum Ursprung - ungerade Funktion

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine ungerade Funktion

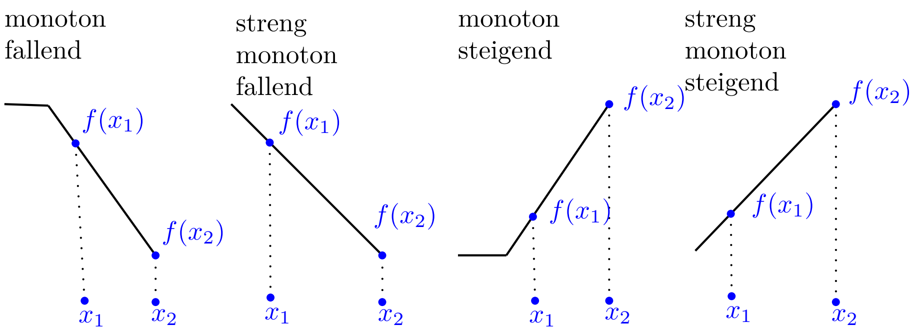
$f(x) = -2x^5 + 3x^3$
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^3$
$f(-x) = -\left(-2 \cdot x^5 + 3 \cdot x^3\right)$
$f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse - gerade Funktion

$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine gerade Funktion

$f(x) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$
$f(-x) = (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2 + 1$
$f(-x) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$
$f(-x) = f(x)$

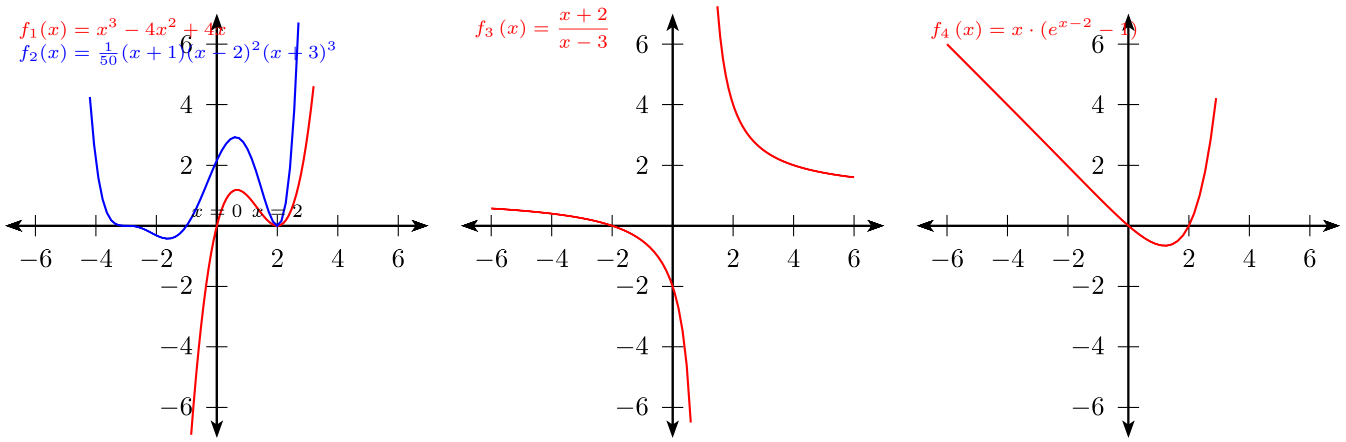
3.4.2 Monotonie



$x_1 < x_2$

monoton steigend		$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	sms	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend		$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	smf	$f(x_1) > f(x_2)$

3.4.3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen



Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen.
$f(x) = 0$ (siehe Algebra-Gleichungen)
• Vielfachheit der Nullstelle gerade
- Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel (VZW)
- Berührpunkt mit die x-Achse (Hoch- oder Tiefpunkt)
• Vielfachheit der Nullstelle ungerade
- Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW)
- Schnittpunkt mit die x-Achse
Einfache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1) \cdot ..$
Zweifache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot ..$
Dreifache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1)^3 \cdot ..$
Vierfache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^4 \cdot ..$

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$
Einfache Nullstelle mit VZW: $x = 0$ $N_1(0/0)$
Zweifache Nullstelle ohne VZW: $x = 2$ $N_2(2/0)$

$f_2(x) = \frac{1}{50}(x+1)(x-2)^2(x+3)^3$
Einfache Nullstelle mit VZW: $x = -1$ $N_1(-1/0)$
Zweifache Nullstelle ohne VZW: $x = 2$ $N_2(2/0)$
Dreifache Nullstelle mit VZW: $x = -3$ $N_3(-3/0)$
$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$
$e^{(x-2)} - 1 = 0 \quad / + 1$
$e^{(x-2)} = 1 \quad / \ln$
$x - 2 = \ln(1) \quad / + 2$
$x = 2$

Schnittpunkte mit der y-Achse

x=0 in den Funktionsterm einsetzen.

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$
$f_1(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$
$P(0/0)$
$f_2(x) = \frac{1}{50}(x+1)(x-2)^2(x+3)^3$
$f_2(0) = \frac{1}{50}(0+1)(0-2)^2(0+3)^3 = 2,16$
$Q(0/2,16)$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen oder den Definitionslückenlücken ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$
Graph	oberhalb	0	unterhalb

$+$ f(x)>0 Graph oberhalb der x-Achse

- f(x)<0 Graph unterhalb der x-Achse

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$

Nullstellen: $x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

Wert kleiner als 0 wählen: $-1 < 0 \qquad f_1(-1) = -1 < 0 \Rightarrow -$

Wert zwischen 0 und 2 wählen:

$0 < 1,2 < 2 \qquad f_1(1,2) = 0,768 > 0 \Rightarrow +$

Wert größer als 2 wählen: $3 > 2 \qquad f_1(3) = 1 > 0 \Rightarrow +$

Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$x \in]0;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$f_3(x) = \frac{x+2}{x-3}$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$x_1 = -2$ 1-fache Nullstelle

Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2;3[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$

$x_1 = 0;$ 1-fache Nullstelle

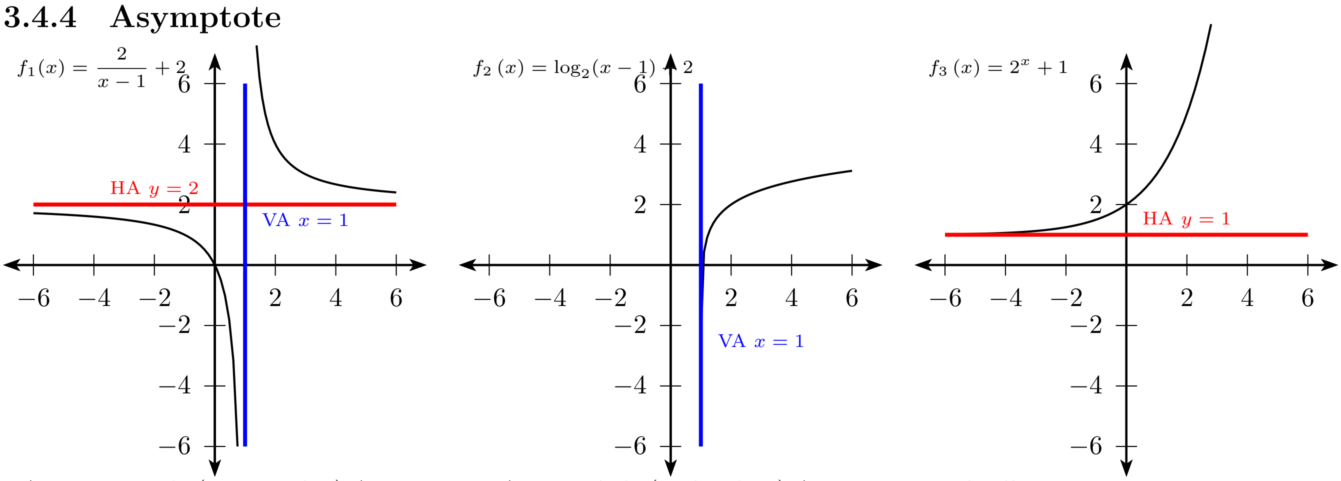
$x_2 = 2;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0;2[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

3.4.4 Asymptote



HA - Horizontale (waagerechte) Asymptote; VA - Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Defintion

Eine Asymptote ist ein Gerade, der sich eine Funktion beliebig weit annähert. (siehe Analysis - Grenzwerte

$f_1(x) = \frac{2}{x-1} + 2$

nicht kürzbare Nullstellen des Nenners

$VA: x = 1 \qquad HA: y = 2$

Horizontale (waagerechte) Asymptote

Funktionsgleichung: $y = a$

$f_3(x) = 2^x + 1$

$HA: y = 1$

Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Funktionsgleichung: $x = b$

$f_2(x) = \log_2(x-1) + 2$
$VA: x = 1$

3.4.5 Verknüpfung von Funktionen

Addition von Funktionen

$u(x) = f(x) + g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) + g(x)$
$u(x) = x^2 + e^x$

Subtraktion von Funktionen

$u(x) = f(x) - g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) - g(x)$
$u(x) = x^2 - e^x$

Multiplikation von Funktionen

$u(x) = f(x) \cdot g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) \cdot g(x)$
$u(x) = x^2 \cdot e^x$

Division von Funktionen

$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
$u(x) = \frac{x^2}{e^x}$

Verketten von Funktionen

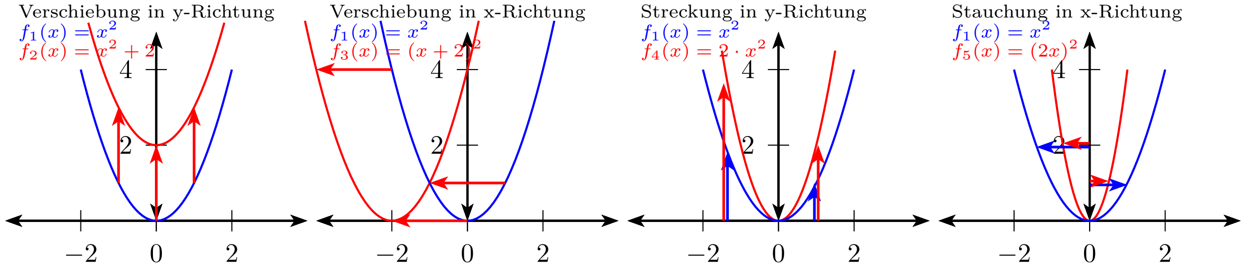
äußere Funktion f(x) - innere Funktion g(x)
$u(x) = f(g(x))$ oder $f \circ g = f(g(x))$ f nach g

äußere Funktion g(x) - innere Funktion f(x)
$v(x) = g(f(x))$ oder $g \circ f = g(f(x))$ g nach f

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(g(x))$
$u(x) = (e^x)^2$
$v(x) = g(f(x))$
$v(x) = e^{x^2}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) -

3.4.6 Abbildung von Funktionen



Verschiebung des Graphen in y-Richtung

$y = f(x) + d$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = x^2 + 2$
Verschiebung um d=2 in y-Richtung
$g_1(x) = e^x \qquad g_2(x) = e^x - 3$
Verschiebung um d=- 3 in y-Richtung

Verschiebung des Graphen in Richtung der x-Richtung

$y = f(x - c)$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_3(x) = (x-2)^2$
Verschiebung um c=2 in x-Richtung
$g_1(x) = e^x \qquad g_3(x) = e^{x+3}$
Verschiebung um c=-3 in x-Richtung

Streckung - Stauchung in y-Richtung

y = a · f(x)
a > 1 : Streckung in y-Richtung
0 < a < 1 : Stauchung in y-Richtung
a = −1 :Spiegelung an der x-Achse
a < -1 : Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Richtung

$f_1(x) = x^2 \qquad f_4(x) = 2x^2$
Streckung in y-Richtung mit $a = 2$
$g_1(x) = e^x \qquad g_4(x) = \frac{1}{3}e^x$
Stauchung in y-Richtung mit $a = \frac{1}{3}$
$f_5(x) = e^x \qquad f_6(x) = -e^x$
Spiegelung an der x-Achse

Streckung - Stauchung in x-Richtung

$y = f(b \cdot x)$
$b > 1$: Stauchung in x-Richung mit $\frac{1}{b}$
$0 < b < 1$: Streckung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$
$b = -1$: Spiegelung an der y-Achse
$b < -1$: Spiegelung an der y-Achse und Stauchung in x-Richung mit $\frac{1}{b}$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_5(x) = (2x)^2$
$b = 2$ Stauchung in x-Richtung mit $\frac{1}{2}$
$g_1(x) = e^x \qquad f_5(x) = e^{(\frac{1}{3}x)}$
$b = \frac{1}{3}$ Streckung in x-Richtung mit 3
$f_5(x) = e^x \qquad f_6(x) = e^{-x}$
Spiegelung an der y-Achse

Zusammenfassung

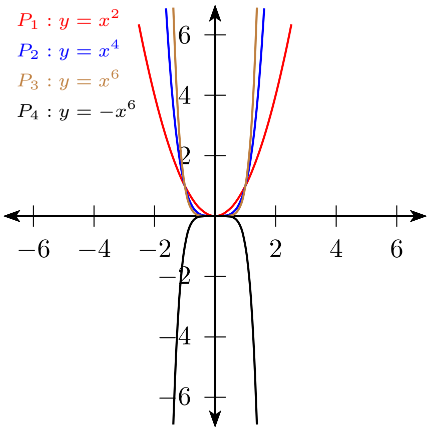
$y = a \cdot f(b(x - c)) + d$
$y = a \cdot f(bx - cb) + d$
a:Streckung/Stauchung in y-Richtung
$\frac{1}{b}$:Streckung/Stauchung in x-Richtung
c:Verschiebung des Graphen in x-Richtung
d:Verschiebung des Graphen in y-Richtung

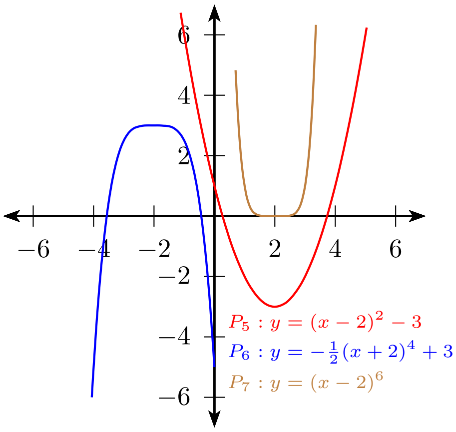
$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = -3(2x-6)^2 + 1 = -3[2(x-3)]^2 + 1$
Streckung in y-Richtung und Spieglung an der x-Achse: $a = -3$
Stauchung in x-Richtung: $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$
Verschiebung des Graphen in x-Richtung: $c = \frac{-6}{2} = 3$
Verschiebung in y-Richtung: $d = 1$
Verschiebung in x-Richtung: 3

Interaktive Inhalte: Graph (JS) -

3.5 Potenzfunktion

3.5.1 Parabeln vom Grad n - gerader Exponent





Formen der Parabelgleichung - gerader Exponent

Exponent:2,4,6..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^n + d$

$y = a(b(x-c))^n + d$

$P_1 : y = x^2$ $\quad P_5 : y = (x-2)^2 - 3$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung
$P_2 : y = x^4$ $\quad P_6 : y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse und Stauchung um $\frac{1}{2}$ in y-Richtung
$P_3 : y = x^6$ $\quad P_9 : y = 2(x+4)^4$
Streckung um 2 in y-Richtung und Verschiebung um -4 in x-Richtung
$P_3 : y = x^6$ $\quad P_7 : y = (x-2)^6$
Verschiebung um 2 in x-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^n \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$y = a(b(x-c))^n + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

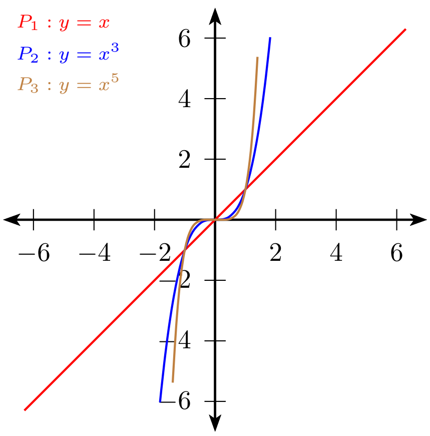
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$

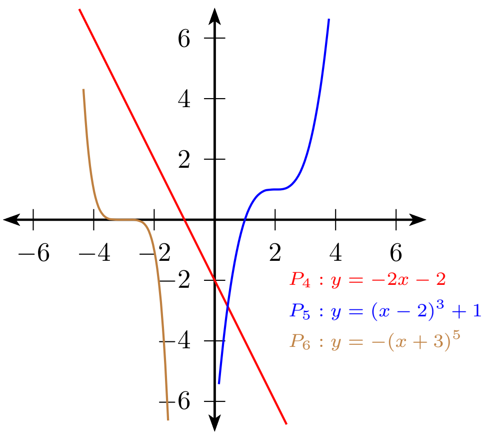
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

$P_2 : y = x^4 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$P_5 : y = (x-2)^2 - 3 \ \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-3; \infty[$
$P_4 : y = -x^6 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$
$P_6 : y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]-\infty; 3]$
$P_9 : y = 2(x+4)^4 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.2 Parabeln vom Grad n - ungerader Exponent





Formen der Parabelgleichung - ungerader Exponent

Exponent:1,3,5..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^n + d$

$y = a(b(x-c))^n + d$

$P_1: y = x \qquad P_4: y = -2x - 2$

Verschiebung um -2 in y-Richtung und Strechung um -2 in y-Richtung

$P_2: y = x^3 \qquad P_5: y = (x-2)^3 + 1$

Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung

$P_3: y = x^5 \qquad P_6: y = -(x+3)^5$

Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um -3 in x-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^n \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

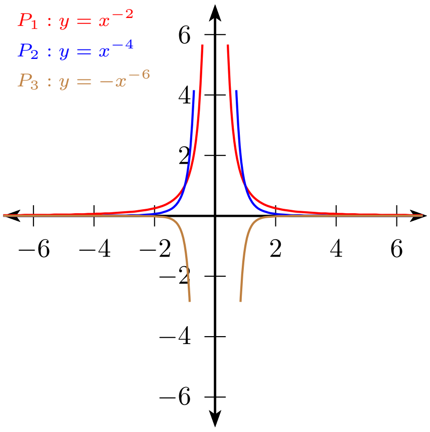
$y = a(b(x-c))^n + d \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

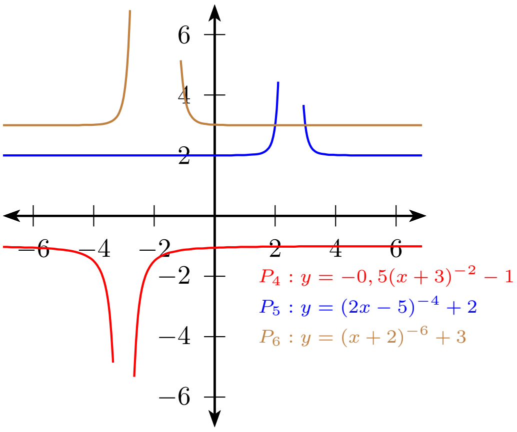
$P_2: y = x^3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

$P_5: y = (x-2)^3 + 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.3 Hyperbeln vom Grad n - gerader Exponent





Formen der Hyperbelgleichung - gerader Exponenten

Exponent:-2,-4,-6..

Grundfunktion: $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^{-n} + d = \frac{a}{(x-c)^n} + d$

$y = a(b(x-c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x-c))^n} + d$

$P_1: y = x^{-2} \qquad P_4: y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und um -1 in y-Richtung

Streckung um -0,5 in y-Richtung

$P_2: y = x^{-4} \qquad P_5: y = (2x-5)^{-4} + 2 = (2(x-2,5))^{-4} + 2$

Verschiebung um 2,5 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung

Stauchung um 2 in x-Richtung

$y = x^{-6} \qquad P_6: y = (x+2)^{-6} + 3$

Streckung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$y = a(b(x-c))^{-n} + d \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$

$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$

$P_1: y = x^{-2} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$P_4: y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; -1[$

$P_6: y = (x+2)^{-6} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \qquad \mathbb{W} =]3; \infty[$

Asymptoten

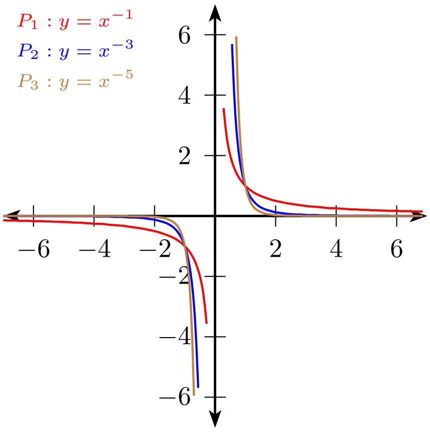
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$
Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d$
Horizontale Asymptote: $y = d$
Vertikale Asymptote: $x = c$

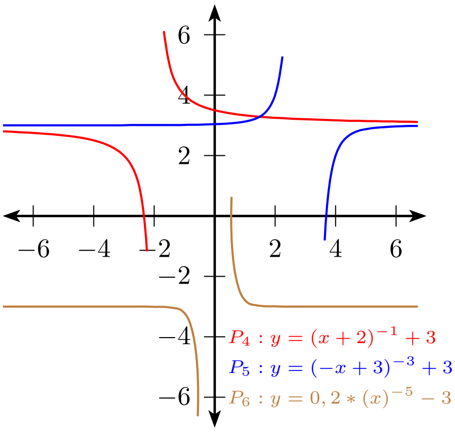
$P_1 : y = x^{-2}$ HA: $y = 0$ VA: $x = 0$
$P_4 : y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$ HA: $y = -1$ VA: $x = -3$

$P_6 : y = (x+2)^{-6} + 3$ HA: $y = 3$ VA: $x = -2$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.4 Hyperbeln vom Grad n - ungerader Exponent





Formen der Hyperbelgleichung - ungerader Exponenten

Exponent:-1,-3,-5..
Grundfunktion: $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Funktion mit Formvariablen:
$y = a(x-c)^{-n} + d = \frac{a}{(x-c)^n} + d$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x-c))^n} + d$

$P_1 : y = x^{-1}$ $P_4 : y = (x+2)^{-1} + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung um 3 in y-Richtung
$P_2 : y = x^{-3}$ $P_5 : y = (-x+3)^{-3} + 3 = (-1(x-3))^{-3} + 3$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung
Spiegelung an der y-Achse
$P_3 : y = x^{-5}$ $P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3$
Streckung um -3 in y-Richtung und Stauchung um 0,2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-n}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{d\}$

$P_1 : y = x^{-1}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$P_4 : y = (x+2)^{-1} + 3$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Asymptoten

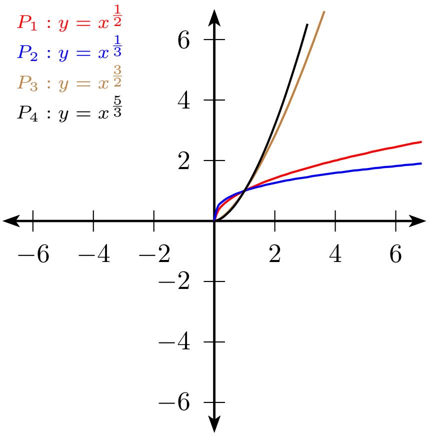
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$
Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d$
Horizontale Asymptote: $y = d$
Vertikale Asymptote: $x = c$

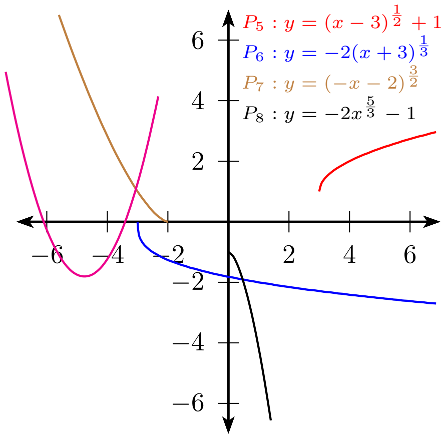
$P_1 : y = x^{-1}$ HA: $y = 0$ VA: $x = 0$
$P_4 : y = (x+2)^{-1} + 3$ HA: $y = 3$ VA: $x = -2$

$P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3$ HA: $y = -3$ VA: $x = 0$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.5 Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent





Formen der Wurzelfunktion - positiver Exponent

Quadratwurzelfuktion: $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ $\quad x > 0$

Grundfunktion: $y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ $\quad x > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(x-c)^n} + d \qquad x - c > 0$

$y = a(b(x-c))^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(b(x-c))^n} + d \qquad b(x-c) > 0$

$P_1: y = x^{\frac{1}{2}} \qquad P_5: y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 1$

Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung

$P_2: y = x^{\frac{1}{3}} \qquad P_6: y = -2(x+3)^{\frac{1}{3}}$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

$P_3: y = x^{\frac{3}{2}} \qquad P_7: y = (-x-2)^{\frac{3}{2}} = (-(x+2))^{\frac{3}{2}}$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse

$P_4: y = x^{\frac{5}{3}} \qquad P_8: y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1$

Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$y = a(b(x-c))^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(b(x-c))^n} + d$

$b > 0 \quad \mathbb{D} = [c; \infty[$

$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c]$

$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$

$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

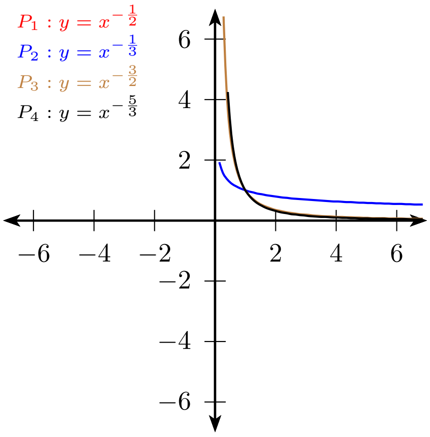
$P_2: y = x^{\frac{1}{3}} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

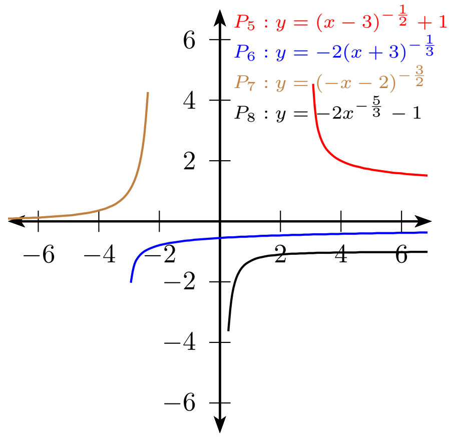
$P_5: y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 1 \qquad \mathbb{D} = [3; \infty[\quad \mathbb{W} = [1; \infty[$

$P_8: y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} =]-\infty; -1]$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.6 Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent





Formen der Wurzelfunktion - negativer Exponent

$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x > 0$

Grundfunktion: $y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \qquad x > 0$

Funktion mit Formvariablen: $y = a(x-c)^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(x-c)^n}} + d \qquad x - c > 0$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = a\frac{1}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d \qquad b(x-c) > 0$

$P_1: y = x^{-\frac{1}{2}} \qquad P_5: y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
$P_2: y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad P_6: y = -2(x+3)^{-\frac{1}{3}}$
Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung
$P_3: y = x^{-\frac{3}{2}} \qquad P_7: y = (-x-2)^{\frac{3}{2}} = (-(x+2))^{-\frac{3}{2}}$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse
$P_4: y = x^{-\frac{5}{3}} \qquad P_8: y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1$
Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d$

$b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$

$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$

$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$

$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$

$P_2: y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$P_5: y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \qquad \mathbb{D} =]3; \infty[\quad \mathbb{W} =]1; \infty[$
$P_8: y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} =]-\infty; -1[$

Asymptoten

$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d$

Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

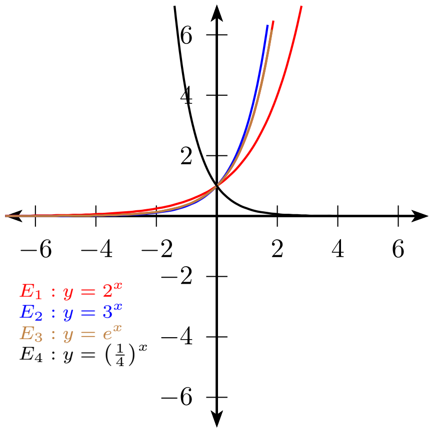
[$P_2: y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad$ HA: $y = 0 \qquad$ VA: $x = 0$
$P_5: y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \qquad$ HA: $y = -1 \qquad$ VA: $x = 3$

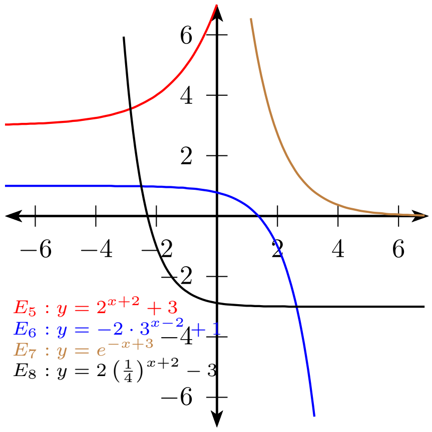
$P_8: y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \qquad$ HA: $y = -1 \qquad$ VA: $x = 0$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.6 Exponentialfunktion

3.6.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Exponentialfunktion

Grundfunktion: $y = q^x \qquad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a \cdot q^{(x-c)} + d \qquad q > 0$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad q > 0$

Funktionen mit der Basis: e = 2,718..

Grundfunktion: $y = e^x$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a \cdot e^{(x-c)} + d$

$y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

$E_1: y = 2^x \qquad E_5: y = 2^{x+2} + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung

$E_2: y = 3^x \qquad E_6: y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Streckung um -2 in y-Richtung

$E_3: y = e^x \qquad E_7: y = e^{-x+3} = e^{-(x-3)}$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse

$E_4: y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x} \qquad E_8: y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung
Streckung um 2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = e^x \qquad y = q^x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$a > 0 \qquad \mathbb{W} =]d; \infty[$

$a < 0 \qquad \mathbb{W} =]-\infty; d[$

$E_1: y = 2^x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$E_4: y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$E_5: y = 2^{x+2} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]3; \infty[$
$E_6: y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; 1[$
$E_8: y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-3; \infty[$

Asymptoten

$y = e^x \qquad y = q^x$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

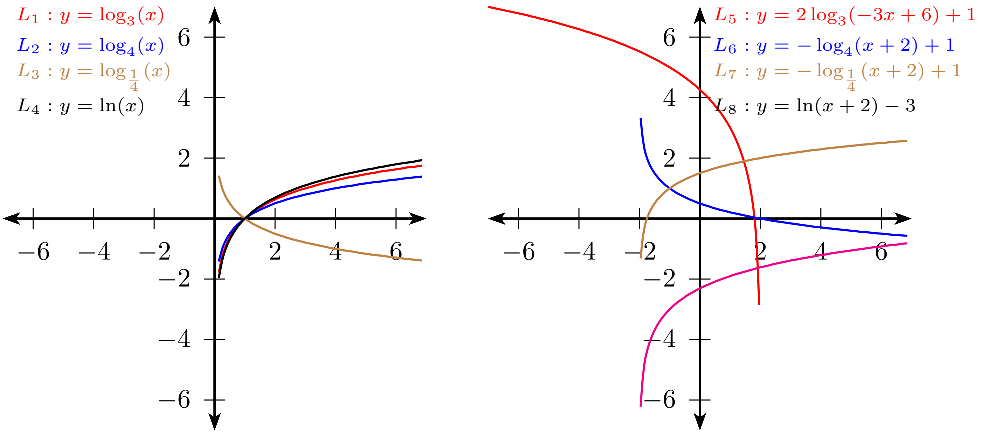
Horizontale Asymptote: $y = d$

[$E_1: y = 2^x \qquad$ HA: $y = 0$
$E_5: y = 2^{x+2} + 3 \qquad$ HA: $y = 3$
$E_8: y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \qquad$ HA: $y = -3$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.7 Logarithmusfunktion

3.7.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Logarithmusfunktion

Grundfunktion: $y = \log_q x \qquad q > 0$
Funktion mit Formvariablen:
$y = a\log_q(x-c)+d \qquad -\frac{d}{c} > 0$
$y = a\log_q(b(x-c))+d$
Funktionen mit der Basis: e = 2,718..
Grundfunktion: $y = \ln x$
Funktion mit Formvariablen:
$y = a\ln(x-c)+d$
$y = a\ln(b(x-c))+d$

$L_1 : y = \log_3(x) \qquad L_5 : y = 2\log_3(-3x+6)+1 = 2\log_3(-3(x-2))+1$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Streckung um 2 in y-Richtung und um -3 in x-Richtung
$L_2 : y = \log_4(x) \qquad L_6 : y = -\log_4(x+2)+1$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse
$L_3 : y = \log_{\frac{1}{4}}(x) \qquad L_7 : y = -\log_{\frac{1}{4}}(x+2)+1$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse
$L_4 : y = \ln(x) \qquad L_8 : y = \ln(x+2)-3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = \log_q x \qquad y = \ln x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$y = a\log_q(b(x-c))+d \qquad y = a\ln(b(x-c))+d$
Definitionsbereich: $b(x-c) > 0$
$b > 0 \qquad \mathbb{D} =]c;\infty[$
$b < 0 \qquad \mathbb{D} =]-\infty;c[$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$L_5 : y = 2\log_3(-3x+6) \qquad \mathbb{D} =]-\infty;2[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$L_6 : y = -\log_4(x+2)+1 \qquad \mathbb{D} =]-2;\infty[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$L_8 : y = \ln(x+2)-3 \qquad \mathbb{D} =]-2;\infty[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Asymptoten

$y = \log_q x \qquad y = \ln x$
Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$
$y = a\log_q(b(x-c))+d \qquad y = a\ln(b(x-c))+d$
Vertikale Asymptote: $x = c$

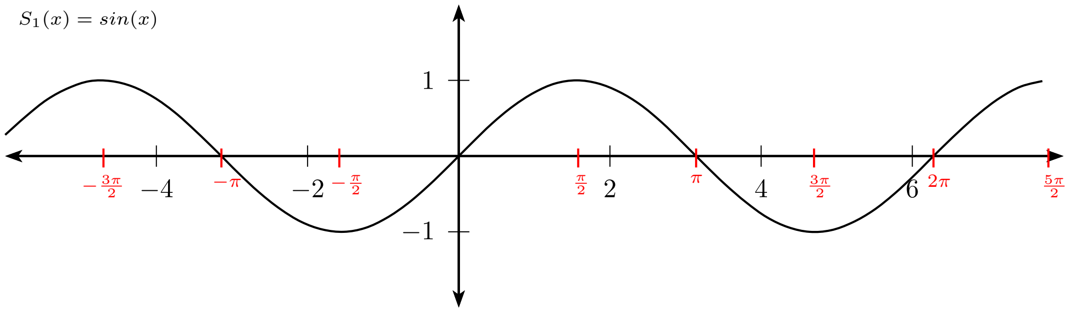
[$L_5 : y = 2\log_3(-3x+6) \qquad$ VA: $x = 2$
$L_6 : y = -\log_4(x+2)+1 \qquad$ VA: $x = -2$

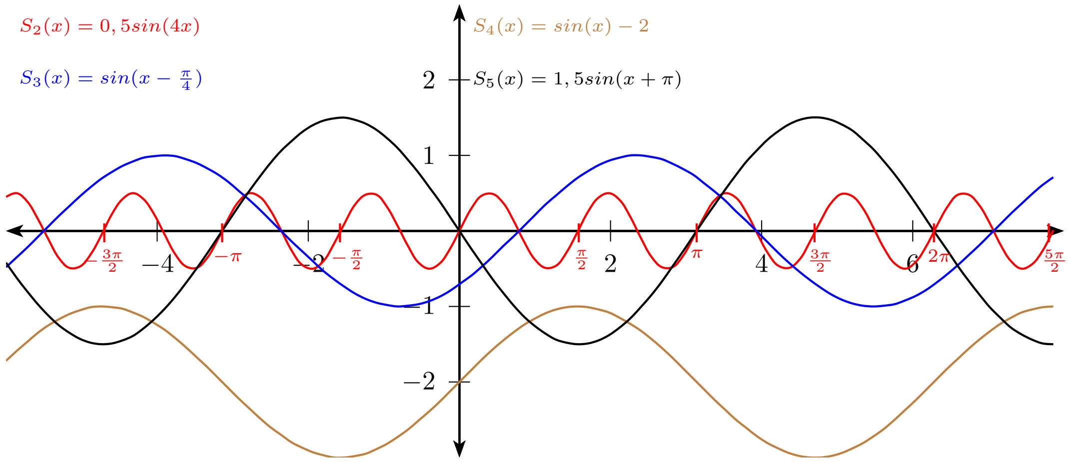
$L_8 : y = \ln(x+2)-3 \qquad$ VA: $x = -2$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.8 Sinusfunktion

3.8.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Sinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \sin x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a\sin(x - c) + d$

$f(x) = a\sin(b(x - c) + d$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

$S_1(x) = \sin(x)$ $S_2(x) = 0,5sin(4x)$
Stauchung um $0,5$ in y-Richtung und $\frac{1}{4}$ in x-Richtung
Amplitude: $0,5$ Periode: $\frac{2\pi}{4}$
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_3(x) = sin(x - \frac{\pi}{4})$
Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung
Amplitude: 1 Periode: 2π
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_4(x) = sin(x) - 2$
Verschiebung um -2 in y-Richtung
Amplitude: 1 Periode: 2π
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_5(x) = 1,5sin(x + \pi)$
Verschiebung um $-\pi$ in x-Richtung und Streckung um 1,5 in y-Richtung
Amplitude: 1 Periode: 2π

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \sin(x)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [1; -1]$

$f(x) = a\sin(b(x - c)) + d$

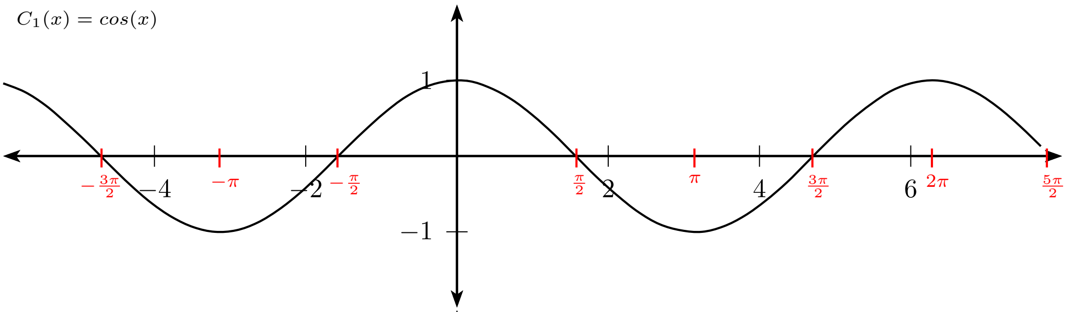
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [d - a; d + a]$

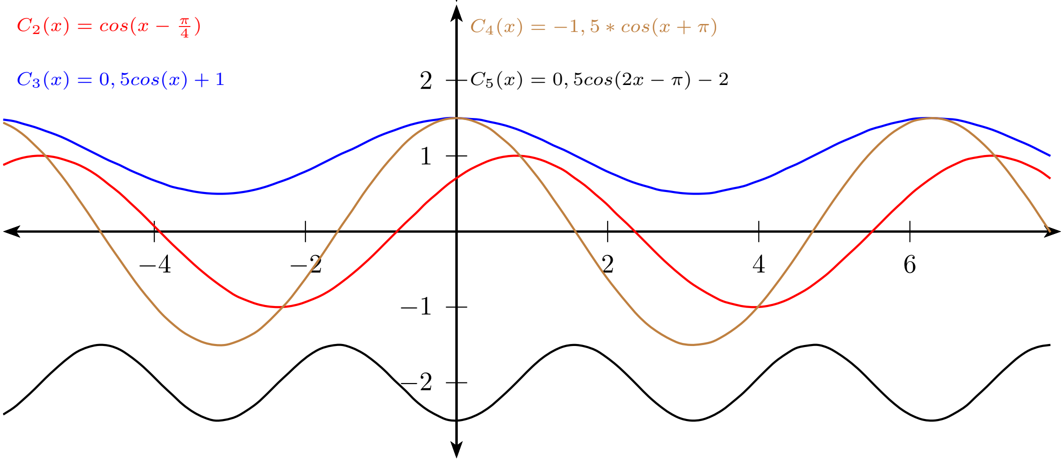
$S_2(x) = 0,5sin(4x)$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-0,5; +0,5]$
$S_3(x) = sin(x - \frac{\pi}{4})$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$S_4(x) = sin(x) - 2$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; -3]$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.9 Kosinusfunktion

3.9.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Kosinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \cos x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a\cos(x - c) + d$

$f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

$C_1(x) = \cos(x)$ $C_2(x) = cos(x - \frac{\pi}{4})$
Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung
Amplitude: 1 Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_3(x) = 0,5cos(x) + 1$
Verschiebung um 1 in y-Richtung und Stauchung um 0,5 in y-Richtung
Amplitude: $0,5$ Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_4(x) = -1,5 * cos(x + \pi)$
Verschiebung um $-\pi$in x-Richtung
Amplitude: $1,5$ Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_5(x) = 0,5cos(2x - \pi) - 2 = 0,5cos(2(x - \frac{\pi}{2})) - 2$
Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung und Streckung um 0,5 in y-Richtung
Amplitude: $0,5$ Periode: Periode: $\frac{2\pi}{2}$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \cos(x)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [1; -1]$

$f(x) = a\cos(b(x - c) + d$

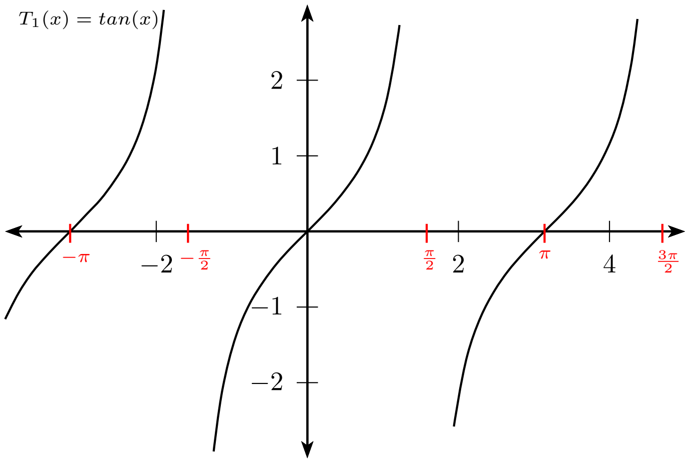
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [d - a; d + a]$

$C_2(x) = cos(x - \frac{\pi}{4})$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$C_3(x) = 0,5cos(x) + 1$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-0,5; +0,5]$
$C_5(x) = 0,5cos(2x - \pi) - 2$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1,5; -2,5]$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.10 Tangensfunktion

3.10.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Tangenfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \tan x$

Periode: π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a \tan (x - c) + d$

$f(x) = a \tan (b(x - c)) + d$

Periode: $\frac{\pi}{b}$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \tan x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{k \cdot \frac{\pi}{2}\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = a \tan b(x + c) + d$

$b(x - c) = k\frac{\pi}{2}$

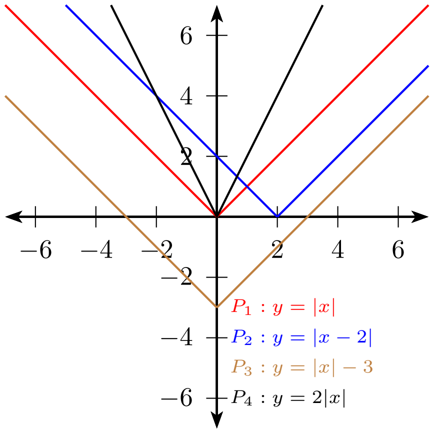
$x = \frac{k\pi}{2b} + c$

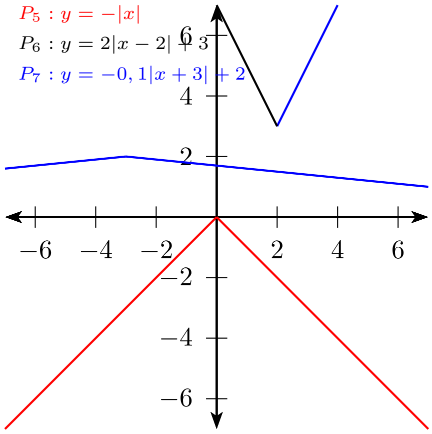
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{k\pi}{2b} + c\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{Z}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.11 Betragsfunktion

3.11.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Betragsfunktion

• Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist.
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird.
Grundfunktion:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a|b(x-c)| + d = \begin{cases} a(b(x-c)) + d & x > c \\ -a(b(x-c)) + d & x < c \\ d & x = c \end{cases}$$

$$P_6: y = 2|x-2| + 3 = \begin{cases} 2(x-2)+3 & x > 2 \\ -2(x-2)+3 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x-1 & x > 2 \\ -2x+7 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

Definitions- und Wertebereich

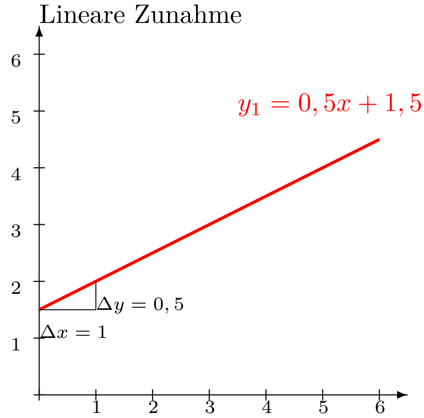
$f(x) = |x|$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$f(x) = a|b(x-c)| + d$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

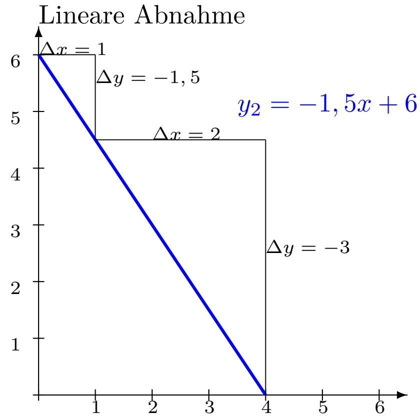
3.12 Wachstumsfunktionen

3.12.1 Lineares Wachstum

Lineare Zunahme



Lineare Abnahme



- Zum Anfangswert t wird pro Zeiteinheit der gleiche Wert m addiert oder subtrahiert.

- Lineare Funktion: $y = m \cdot x + t$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.
y - Funktionswert nach der Zeit x
t - Anfangswert
m - konstante Änderungsrate, Steigung
$m > 0$ positives lineares Wachstum (Zunahme)
$m < 0$ negatives lineares Wachstum (Abnahme)
$m = 0$ Nullwachstum

- Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Umformungen: $y = m \cdot x + t$

$x = \frac{y-t}{m}$ $t = y - m \cdot x$ $m = \frac{y-t}{x}$

- Schreibweisen

Funktion	Änderungsrate	Variable	Anfangswert
$y = m \cdot x + t$	m	x	t
$y = a \cdot x + b$	a	x	b
$y = a + b \cdot x$	b	x	a
$f(x) = a \cdot x + f_0$	a	x	f_0
$N(t) = a \cdot t + N_0$	a	t	N_0
$B(t) = k \cdot t + B_0$	a	x	B_0
$K(t) = q \cdot t + K_0$	q	t	K_0

Lineare Zunahme
Ein Wasserbecken entält 1,5 Liter Wasser. Pro Minute fließen 0,5 Liter zu.
x_1= Minuten y_1= Liter $t = 1,5$

x_1	0	1	2	3	4
y_1	$1,5$	$1,5 + 0,5$	$2 + 0,5$	$2,5 + 0,5$	$3 + 0,5$
y_1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1,5}{1-0} = \frac{0,5}{1} = 0,5$
$y = 0,5x + 1,5$

Lineare Abnahme
Ein Wasserbecken entält 6 Liter Wasser. Pro Minute fließen 1,5 Liter ab.
x_2= Minuten y_2= Liter

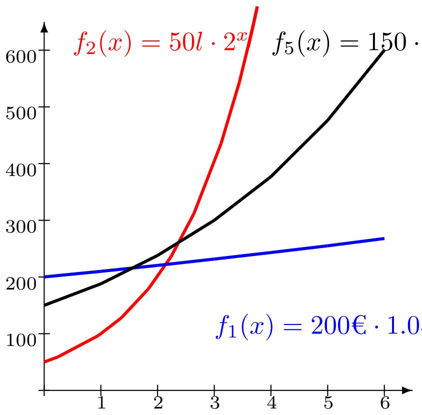
x_2	0	1	2	3	4
y_2	6	$6 - 1,5$	$4,5 - 1,5$	$3 - 1,5$	$1,5 - 1,5$
y_2	6	$4,5$	3	$1,5$	0

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,5-6}{1-0} = \frac{-1,5}{1} = -1,5$
$y = -1,5x + 6$

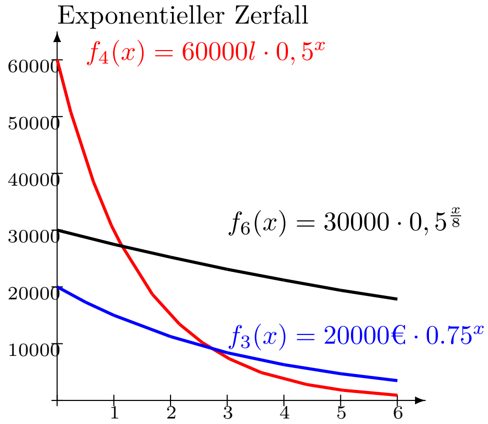
Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Eigenschaften - $y = m \cdot x + t$ - $m = \frac{y-t}{x}$ - $x = \frac{y-t}{m}$ - $t = y - m \cdot x$ -

3.12.2 Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum



Exponentieller Zerfall



Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

• Der Anfangswert a wird pro Zeiteinheit mit den gleichen Faktor q multipliziert.

• Funktion: $f(x) = a \cdot q^x$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

q - Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

•Prozentuale Zunahme p pro Zeiteinheit

$f(x) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^x = a \cdot q^x$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $\quad p = (q - 1) \cdot 100$

•Prozentuale Abnahme p pro Zeiteinheit

$f(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^x = a \cdot q^x$

$q = 1 - \frac{p}{100}$ $\quad p = (1 - q) \cdot 100$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

1.Ableitung: $f'(x) = a \cdot ln(q) \cdot q^x$

• Umformungen $y = f(x)$

$y = a \cdot q^x \quad a = \frac{y}{q^x} \quad x = log_q(\frac{y}{a}) \quad q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$

• Schreibweisen

Funktion	Wachstumsfaktor	Variable	Anfangswert
$f(t) = a \cdot q^t$	q	t	a
$y = a \cdot b^x$	b	x	a
$y = b \cdot a^t$	a	t	b
$K(t) = K_0 \cdot q^t$	q	t	N_0
$N(t) = N_0 \cdot q^t$	q	t	N_0

Exponentielle Zunahme

Ein Kapital von 200 € wird mit 5 % (pro Jahr) verzinst.

x_1= Jahr $\quad y_1$=Euro $\quad$ p=5 $\quad q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05 \quad a = 200€$

x_1	0	1	2	3	4
y_1	200	$200 \cdot 1,05$	$210 \cdot 1,05$	$220,5 \cdot 1,05$	$231,52 \cdot 1,05$
y_1	200	210	220, 5	231, 52	243, 1

$f_1(x) = 200€ \cdot (1 + \frac{5}{100})^x \quad f_1(x) = 200€ \cdot 1,05^x$

Kapital nach 10 Jahren: $f_1(10) = 200€ \cdot 1,05^{10} = 325,78€$

In jeder Minute verdoppelt sich die Wassermenge in einem Wasserbecken. Nach 4 Minuten enthält es 800 Liter Wasser.

$q = 2 \quad f(4) = 800$

Prozentuale Zunahme: $p = (2 - 1) \cdot 100\% = 100\%$

Anfangswert: $a = \frac{y}{q^x} = \frac{800}{2^4} = 50l$

$f_2(x) = 50€ \cdot 2^x \quad f_2(x) = 50 \cdot (1 + \frac{100}{100})^x$

Exponentielle Abnahme

Ein Auto kostet 20000 €. Der Wertverlust beträgt 25 % pro Jahr. $\quad$ x= Jahre $\quad y_3$=€

x	0	1	2	3	4
y_3	20000	$20000 \cdot 0,75$	$25000 \cdot 0,75$	$11250 \cdot 0,5$	$8437,50 \cdot 0,75$
y_3	20000	25000	11250	8437, 50	6328, 12

$f_3(x) = 20000€ \cdot (1 - \frac{25}{100})^x \quad f_3(x) = 20000€ \cdot 0,75^x$

Wann ist das Auto nur noch 1000 € Wert?

$x = log_q(\frac{y}{a}) = log_0,75(\frac{1000€}{20000€}) = 19,41$ Jahren

Ein Wasserbecken enthält 60000 Liter Wasser.

Pro Minute halbiert sich die Wassermenge.

x_4= Minuten $\quad y_4$= Liter

x_4	0	1	2	3	4
y_4	60000	$60000 \cdot 0,5$	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$
y_4	60000	30000	15000	7500	3750

$f_4(x) = 60000l \cdot 0,5^x \quad f_4(x) = 60000l \cdot (1 - \frac{50}{100})^x$

Wachstumsfaktor pro Periode

• Der Anfangswert a wird pro Periode mit den gleichen Faktor q multipliziert.

• Funktion: $f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$
x - Zeit in Stunden, Minuten usw.
$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x
a - Anfangswert
T - Periode, Zeitintervall
q - Wachstumsfaktor pro Periode
$q > 1$ exponentielles Wachstum
$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall
$q = 0$ Nullwachstum

• Prozentuale Zunahme p pro Periode T
$f(x) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^{\frac{x}{T}}$
$q = 1 + \frac{p}{100}$ $p = (q - 1) \cdot 100$

• Prozentuale Abnahme pro Periode T
$f(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^{\frac{x}{T}}$
$q = 1 - \frac{p}{100}$ $p = (1 - q) \cdot 100$

• Umformungen $y = f(x)$
$y = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$ $a = \frac{y}{q^{\frac{x}{T}}}$ $x = T \cdot log_q(\frac{y}{a})$ $q = \sqrt[\frac{x}{T}]{\frac{y}{a}}$

Exponentielles Wachstum
Zu Beginn der Beobachtung sind 150 Bakterien vorhanden. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 3 Stunden.
q=2 T=3 $a = 150$
x_5= Stunden y_5=Anzahl der Bakterien

x_5	0	3	6	9	12
y_5	150	$150 \cdot 2$	$300 \cdot 2$	$600 \cdot 2$	$1200 \cdot 2$
y_1	150	300	600	1200	2400

$f_5(x) = 150 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$
Anzahl der Bakterien nach 2 Stunden:
$f_5(2) = 150 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 238$

Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Am Anfang sind 30000 Atome vorhanden.
q=0,5 T=8 $a = 30000$
x_6= Tage y_6= Anzahl der Atome

x_6	0	8	16	24	32
y_6	30000	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$	$37500 \cdot 0,5$
y_6	30000	15000	7500	3750	1875

$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}}$ $f_6(x) = 30000 \cdot (1 - \frac{50}{100})^{\frac{x}{8}}$

Wachstumskonstante und e-Funktion

•Funktion: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

f(x) - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

k - Wachstumskonstante

$k > 0$ exponentielles Wachstum

$k < 0$ exponentieller Zerfall

• Wachstumsfaktor q pro Zeiteinheit

$f(x) = a \cdot q^x = a \cdot e^{ln(q^x)} = a \cdot e^{ln(q) \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}$

$k = ln(q) \qquad q = e^k$

• Wachstumsfaktor q pro Periode T

$f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}} = a \cdot e^{ln(q^{\frac{x}{T}})} = a \cdot e^{ln(q) \cdot \frac{x}{T}} = a \cdot e^{k \cdot x}$

$k = \frac{ln(q)}{T} \qquad q = e^{k \cdot T}$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

1.Ableitung: $f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot f(x)$

• Umformungen $y = f(x)$

$y = a \cdot e^{k \cdot x} \qquad a = \frac{y}{e^{k \cdot x}} \qquad x = \frac{ln(\frac{y}{a})}{k} \qquad k = \frac{ln(\frac{y}{a})}{x}$

$f_1(x) = 200€ \cdot 1,05^x$

$k = ln(q) = ln(1,05) = 0,0488$

$f_1(x) = 200€ \cdot e^{ln(1,05)x} \qquad f_1(x) = 200€ \cdot e^{0,0488x}$

$f_1(10) = 200€ \cdot e^{ln(1,05)10} = 325,78$

$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}}$

$k = \frac{ln(q)}{T} = \frac{ln(0,5)}{8} = -0,087$

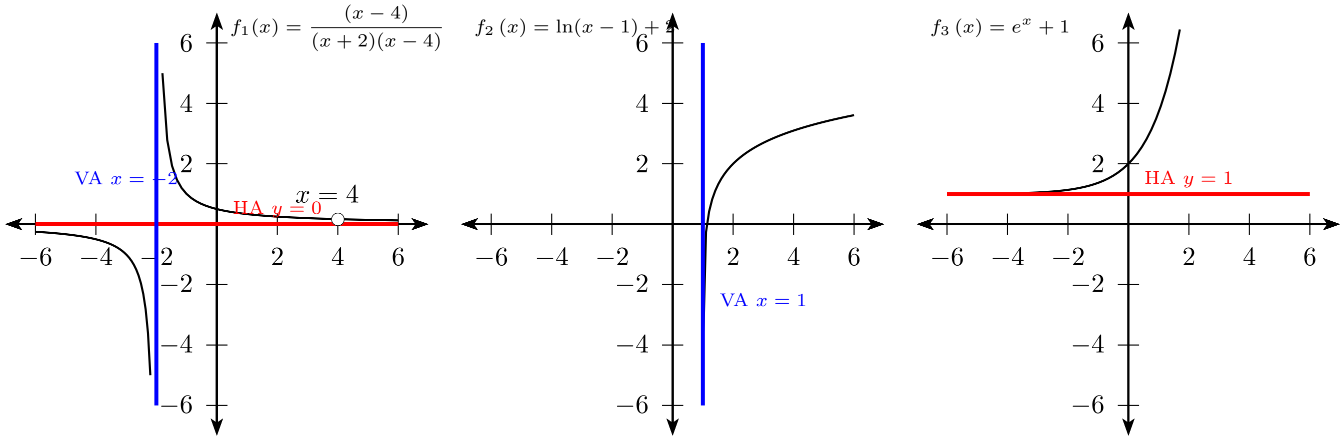
$f_6(x) = 30000 \cdot e^{\frac{ln(0,5)}{8}x} \qquad f_6(x) = 30000 \cdot e^{-0,087x}$

Interaktive Inhalte: $p = (q-1) \cdot 100$ - $q = 1 + \frac{p}{100}$ - $f(x) = a \cdot q^x$ - $a = \frac{f(x)}{q^x}$ - $x = log_q(\frac{y}{a})$ - $q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$ -

4 Analysis

4.1 Grenzwert - Stetigkeit

4.1.1 Grenzwert von f(x) für x gegen x0



• Linksseitiger Grenzwert (LGW) von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$ oder $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = a$

• Rechtsseitiger Grenzwert (RGW) von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ oder $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = a$

• Grenzwert von f(x) existiert

linksseitige Grenzwert = rechtsseitige Grenzwert

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

• Linksseitiger Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich

(bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

• Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich

(bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow$ vertikale Asymptote - Polstelle an der Stelle $x = x_0$

$f_1(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

Linksseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen 4

$x \to 4^-$	$f(x) \to \frac{1}{6}$
3,99	0,166945
3,999	0,166694
3,9999	0,166669
3,99999	0,166667

$\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$
$\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen 4

$x \to 4^+$	$f(x) \to \frac{1}{6}$
4,01	0,166389
4,001	0,166639
4,0001	0,166664
4,00001	0,166666

$\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$
$\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Stetig behebare Definitionslücke

Linksseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen -2

$x \to -2^-$	$f(x) \to -\infty$
−2,01	−100
−2,001	−1000
−2,0001	−10000
−2,00001	−99999,999999

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$
$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen -2

$x \to -2^+$	$f(x) \to \infty$
−1,99	100
−1,999	1000
−1,9999	10000
−1,99999	99999,999999

$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$
$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) + 2 = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 1$

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.1.2 Grenzwert von f(x) für x gegen Unendlich

• Grenzwert von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

$\Rightarrow$ horizontale Asymptote $y = a$

• Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Funktion:

$f\,(x) = -x^3$

Grenzwert von f(x) für x gegen ∞ und gegen -∞

$x\to\infty$	$f(x)\to-\infty$
10	-1000
100	-1000000
1000	-1000000000
10000	-1000000000000

$x\to-\infty$	$f(x)\to\infty$
-10	1000
-100	1000000
-1000	1000000000
-10000	1000000000000

$\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 = [-1\cdot\infty^3] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 = [-1\cdot(-\infty)^3] = \infty$

$f\,(x) = \dfrac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-2;4\}$

Grenzwert von f(x) für x gegen ∞ und gegen -∞

$x\to\infty$	$f(x)\to 0$
10	$0,083333$
100	$0,009804$
1000	$0,000998$
10000	$0,0001$
100000	$0,00001$

$x\to-\infty$	$f(x)\to 0$
-10	$-0,125$
-100	$-0,010204$
-1000	$-0,001002$
-10000	$-0,0001$
-100000	$-0,00001$

$$f_1\,(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x-4}{x^2-2x-4} = \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$f_2\,(x) = \ln(x-1)+2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x-1)+2 = \infty$

$f_3\,(x) = e^x+1$

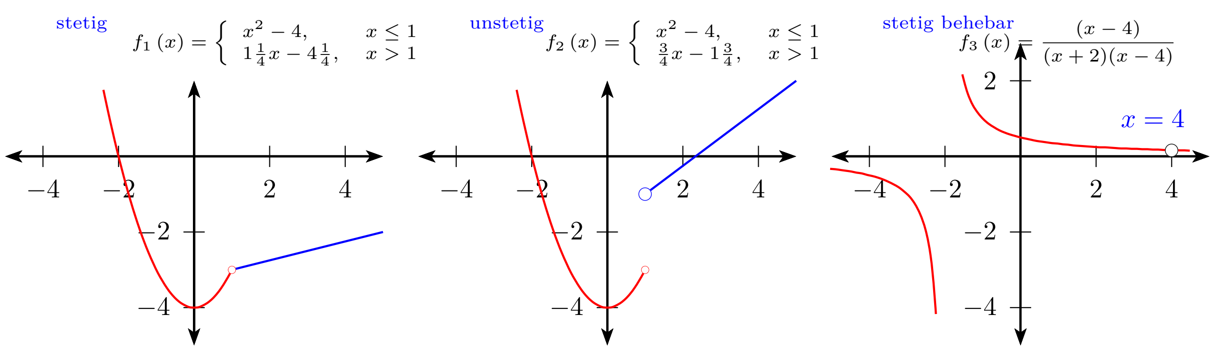
$\lim\limits_{x\to\infty} e^x+1 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1 = 1$

Horizontale Asymptote: $y = 1$

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.1.3 Stetigkeit



• Ein Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der linksseitige GW = rechtsseitige GW = Funktionswert f(x)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

• Stetige Funktionen
- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Sinus- und Kosinusfunktion

• Stetige Funktionen, bei denen die Unstetigkeitsstellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sind:
- Gebrochenrationale Funktionen
- Logarithmusfunktionen
- Tangensfunktion

• Abschnittsweise definierte Funktionen müssen an den Schnittstellen auf Stetigkeit untersucht werden.

• Stetig behebare Definitionslücke x_0
- linksseitige GW = rechtsseitige GW

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4}, & x > 1 \end{cases}$

LGW: $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 4 = -3$

RGW: $\lim\limits_{x \to 1^+} 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4} = -3$

FW: $f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$

LGW = RGW = FW $\Rightarrow$
ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$

$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}, & x > 1 \end{cases}$

LGW: $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 4 = -3$

RGW: $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4} = -1$

FW: $f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$

LGW $\neq$ RGW $\neq$ FW $\Rightarrow$
ist unstetig an der Stelle $x_0 = 1$

$f_3(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{(x+2)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

$f_3(x)$ stetig in D

RGW: $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

LGW: $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

$RGW = LGW$

$\Rightarrow$ stetig behebare Definitionslücke: $x_0 = 4$
Stetige Fortsetzung von $f_2(x)$

$f_4(x) = \frac{1}{(x+2)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.1.4 Rechenregeln

Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{x \to 0} a \cdot x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} a \cdot x = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} 4 \cdot x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} 7 \cdot x = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-3}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} 2e^x = \infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} -3e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 3 \ln x = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} 6 \ln x = \infty$

Rechenregeln

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f \qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f + g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f - g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f \cdot g$

$g(x) \neq 0 \qquad \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f}{g}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{x(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2})} = 0$

Zähler:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 - 0 = 1$

Nenner:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} x(1 - 0 - 0) = \infty$

Zähler durch Nenner: $\frac{1}{\infty} = 0$

Unbestimmte Ausdrücke

Typ 1: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ Typ 2: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Regel von L'Hospital
Zähler und Nenner getrennt ableiten, bis man den Grenzwert berechnen kann.
$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}...$

Typ 3: $\lim f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \pm\infty$
- Umformen in Typ 1 oder 2 und danach L'Hospital

Typ 4: $\lim (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$
- Brüche auf gemeinsamen Hauptnenner bringen
- Faktorisieren

Typ 1: $\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$
Typ 2: $\frac{\infty}{\infty}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cdot x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^2} = \frac{2}{\infty} = 0$

Typ 3: $\infty \cdot 0$
$\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
$\lim_{x\to 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0$
Typ 4: $\infty - \infty$
$\lim_{x\to\infty} x^2 - x = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = \infty$
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{x^2} = \infty$

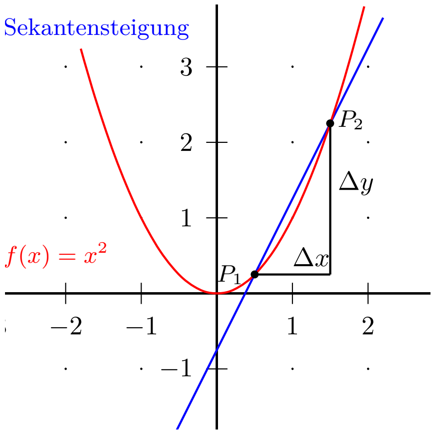
Wichtige unbestimmte Ausdrücke

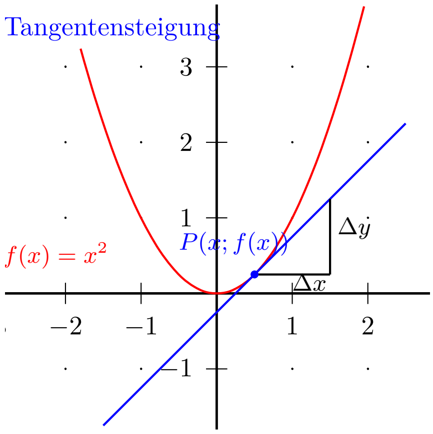
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{-4x^5}{e^x} = 0$ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{\ln x} = \infty$ $\lim_{x\to\infty} \frac{4\ln x}{x} = 0$

4.2 Differentialrechnung

4.2.1 Definition





Sekantensteigung

Eine Grade schneidet eine Funktion in den Punkten $P_1(x_0; f(x_0))$ und $P_2(x; f(x))$.
Steigung der Sekante an der Stelle x_0
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$\Delta x = h \qquad x = x_0 + h$
$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
Sekantensteigung = Differenzenquotient = Mittlere Änderungsgrate
Für kleine h ist die Sekantensteigung ≈ Tangentensteigung
$m \approx f'(x_0)$

$f(x) = x^2$
Die Sekantensteiung m durch die Punkte
$P_1(0.5; 0,25) \qquad P_2(1,5; 2,25)$
$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$m = \frac{2,25 - 0,25}{1,5 - 0,5} = 2$
Die Sekantensteiung m an der Stelle $x_0 = 0,5$ und $h = 1$
$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
$m = \frac{f(0,5 + 1) - f(0,5)}{1}$
$m = \frac{2.25 - 0,25}{1} = 2$
Die Sekantensteiung m an der Stelle $x_0 = 0,25$ und $h = 0,001$
$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
$m = \frac{f(0,5 + 0,001) - f(0,5)}{0,001}$
$m = \frac{0,251001 - 0,25}{0,001} = 1,001$
$m \approx f'(0,5) = 1$

1. Ableitung - Differentialqoutient

Die Ableitung von $f(x)$ ist die Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.
$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$x = x_0 + h$
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
1. Ableitung = Steigung der Tangente = Steigung der Funktion f(x)=lokale (momentane) Änderungsrate
Die Ableitung von $f(x)$ an einer beliebigen Stelle x
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Die 1. Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0,5$
$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(0,5 + h)^2 - 0,5^2}{h}$
$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{0,25 + h + h^2 - 0,25}{h}$
$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{h(1 + h)}{h}$
$f'(1) = \lim_{h \to 0} 1 + h = 1$
Die Ableitung von $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle x
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$
$f'(x) = 2x$
$f'(0,5) = 1$

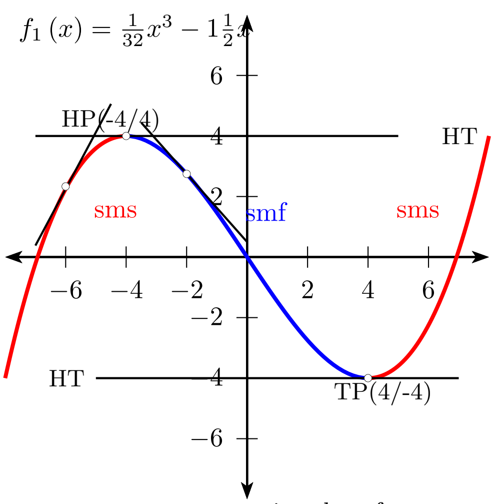
2.Ableitung

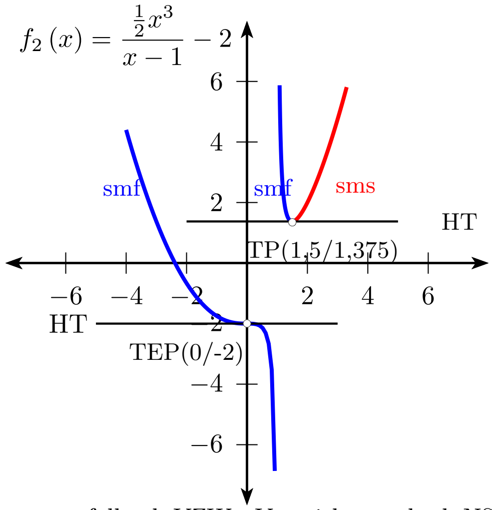
Die Ableitung der 1. Ableitung ist die 2.Ableitung. Die 2.Ableitung gibt die Krümmung einer Funktion f(x) an der Stelle x_0 an.

$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$
$f'(x) = -4x^3 + 6x + 2$
$f''(x) = -12x^2 + 6$

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.2.2 1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte





sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt;

Steigung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

$m = f'(x_0)$

•Funktion
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
Steigung an der Stelle $x = -6$
$m = f'(-6) = 1\frac{7}{8}$
Steigung an der Stelle $x = -2$
$f'(-2) = -1\frac{1}{8}$

Stelle x_0 an der $f(x_0)$ die Steigung m besitzt

$f'(x) = m$
Bei horizontalen Tangenten ist die Steigung Null.
$f'(x) = 0$

•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$
Horizontale Tangente
$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$
$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

Monotonieverhalten

monoton steigend		$f'(x) \geq 0$
streng monoton steigend	sms	$f'(x) > 0$
monoton fallend		$f'(x) \leq 0$
streng monoton fallend	smf	$f'(x) < 0$

Das Monotonieverhalten kann sich nur an den Extremstellen und an den Rändern des Definitionbereich (Definitionslücken) ändern.

Monotonieverhalten an der Stelle $x = -6$
$m = f'(-6) = 1\frac{7}{8} > 0 \Rightarrow$ sms
Monotonieverhalten an der Stelle $x = -2$
$f'(-2) = -1\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow$ smf

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.
In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.
Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).
Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).
Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Funktion
$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
•$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$

$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$
$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$
• Vorzeichentabelle von $f'(x)$

	$x <$	-4	$< x <$	4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$Graph$	sms	HP	smf	TP	sms

Hochpunkt:$(-4/4)$ Tiefpunkt:$(4/-4)$
•Monotonieverhalten
$x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]4; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ sms
$x \in]-4; 4[\quad f'(x) < 0 \quad$ smf

•Funktion
$f_2(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3}{x-1} - 2$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{1\frac{1}{2}x^2 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}x^3 \cdot 1}{(x-1)^2}$
$= \frac{(1\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{2}x^3}{(x-1)^2}$
$= \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$
Zaehler $= 0$
$x^2(x - 1\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x - 1\frac{1}{2} = 0$
$x - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$
$x = 1\frac{1}{2}$
$x_0 = 0$; 2-fache Nullstelle
$x_1 = 1\frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle
Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen$x_3 = 1$

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
Graph	smf	TEP	smf		smf	HP	sms

TEP(0/0) TP$(1\frac{1}{2}/1\frac{3}{8})$
•Monotonieverhalten
$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 1[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ smf
$x \in]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ sms

Extremwerte und die 2.Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

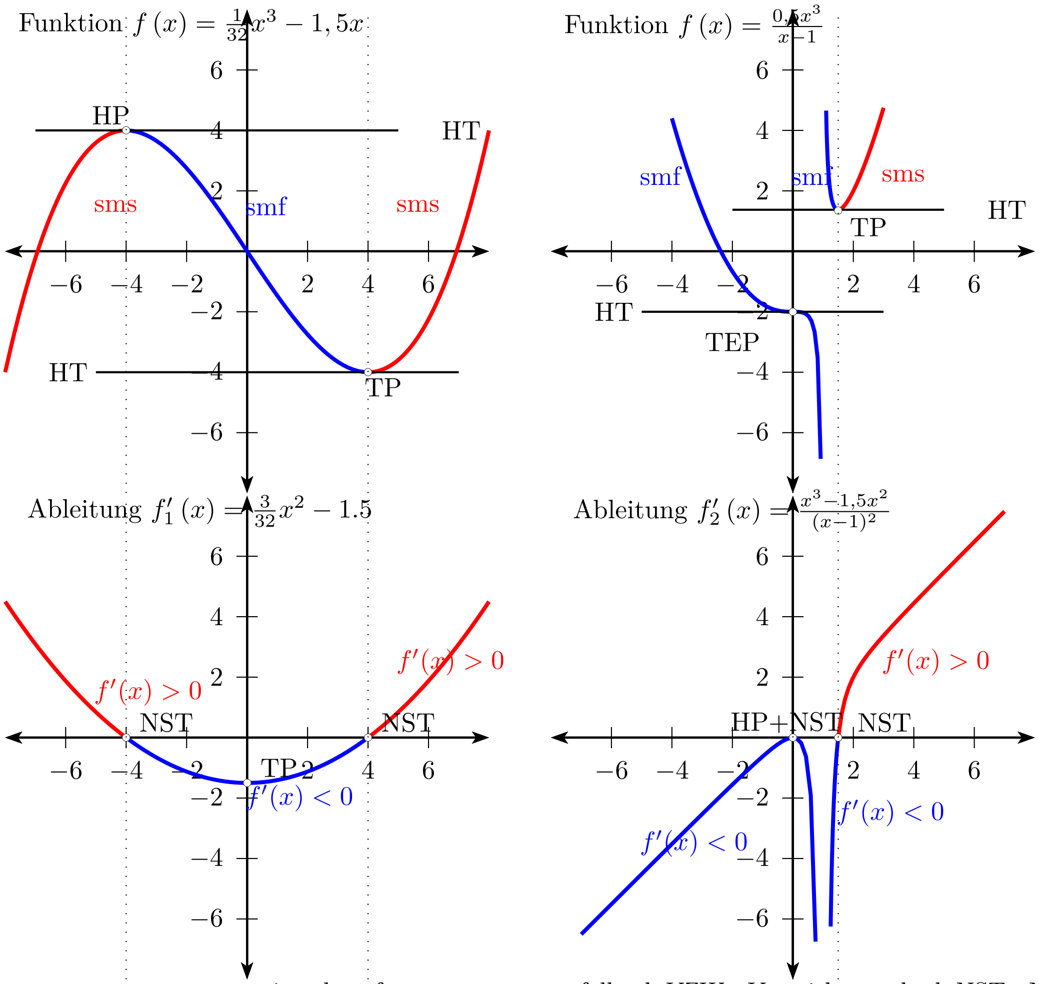
Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.
In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.
Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0 (LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0 (RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

•Funktion
$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
•2. Ableitungen
$f''(x) = \frac{3}{16}x$
•$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$
$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \qquad / : \frac{3}{32}$
$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$
$f''(-4) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{HP}(-4/4)$
$f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{TP}(4/-4)$

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.2.3 Graph der 1. Ableitung



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Funktion - 1. Ableitung f'(x)

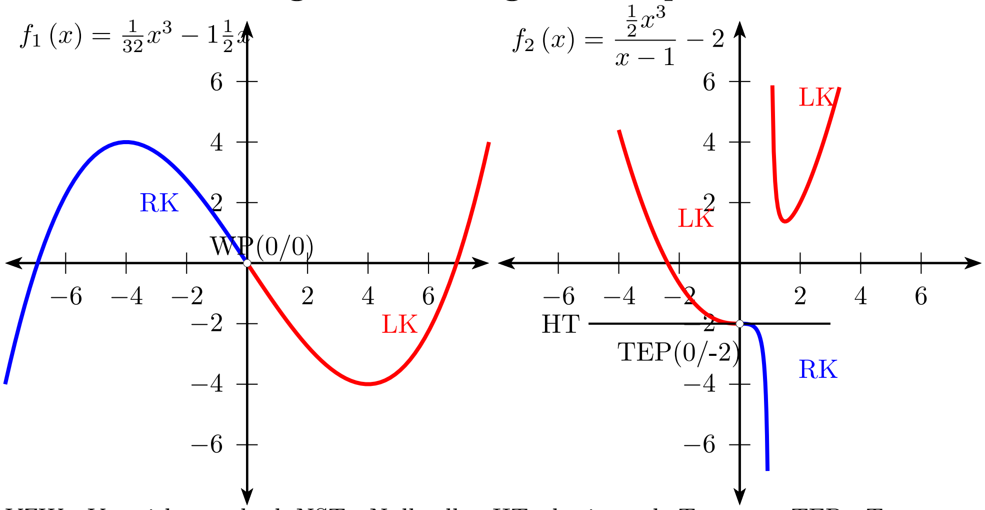
Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Extremwert	NST $f'(x) = 0$
HT	NST $f'(x) = 0$
HP	NST und VZW von $+$ nach $-$
TP	NST und VZW von $-$ nach $+$
TEP	NST ohne VZW
WP	Extremwert
sms	$f'(x) > 0$ (positiv)
smf	$f'(x) < 0$ (negativ)
VA	VA $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$
HA	HA $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x \quad f_1'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1.5$

$f_1(x)$	$f_1'(x)$
Extremwert: $x = -4$	NST $x = -4$
HP:$x = -4$	VZW von + nach - $x = -4$
WP: $x = 0$	Extremwert: $x = 0$
sms: $x < -4$	$f(x) > 0 \quad x < -4$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

4.2.4 2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte



VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Krümmung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

Rechtskrümmung	RK	$f''(x) < 0$
Linkskrümmung	LK	$f''(x) > 0$

Das Krümmungsverhalten kann sich nur an den Nullstellen der 2. Ableitung und an den Rändern des Definitionbereichs (Definitionslücken) ändern.

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x<$	x_1	$<x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x<$	x_1	$<x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x<$	x_1	$<x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x<$	x_1	$<x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Funktion

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$

$f_1'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$

•2. Ableitungen

$f_1''(x) = \frac{3}{16}x$

$f_1''(x) = \frac{3}{16}x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x<$	0	$<x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

WP(0/0)

$x \in]0;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ LK

$x \in]-\infty;0[\quad f''(x) < 0 \quad$ RK

•Funktion

$f_2(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3}{x-1}$

$f_2'(x) == \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$

•2. Ableitungen

$f_2''(x) = \frac{(x^2-3x+3)x}{(x-1)^3} \qquad$ Zähler =0

$x(x^2-3x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2-3x+3 = 0$

$x^2-3x+3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_9 = 0$; 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_{10} = 1$; 1-fache Nullstelle

	$x<$	0	$<x<$	1	$<x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK		RK

WP(0/−2) kein WP $x = 1$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ LK

$x \in]0;1[\quad f''(x) < 0 \quad$ RK

Wendepunkte und die 3.Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

•Funktion

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$

•1. Ableitungen

$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$

•2. Ableitungen

$f''(x) = \frac{3}{16}x$

•3. Ableitungen

$f'''(x) = \frac{3}{16}$

$f''(x) = \frac{3}{16}x = 0$

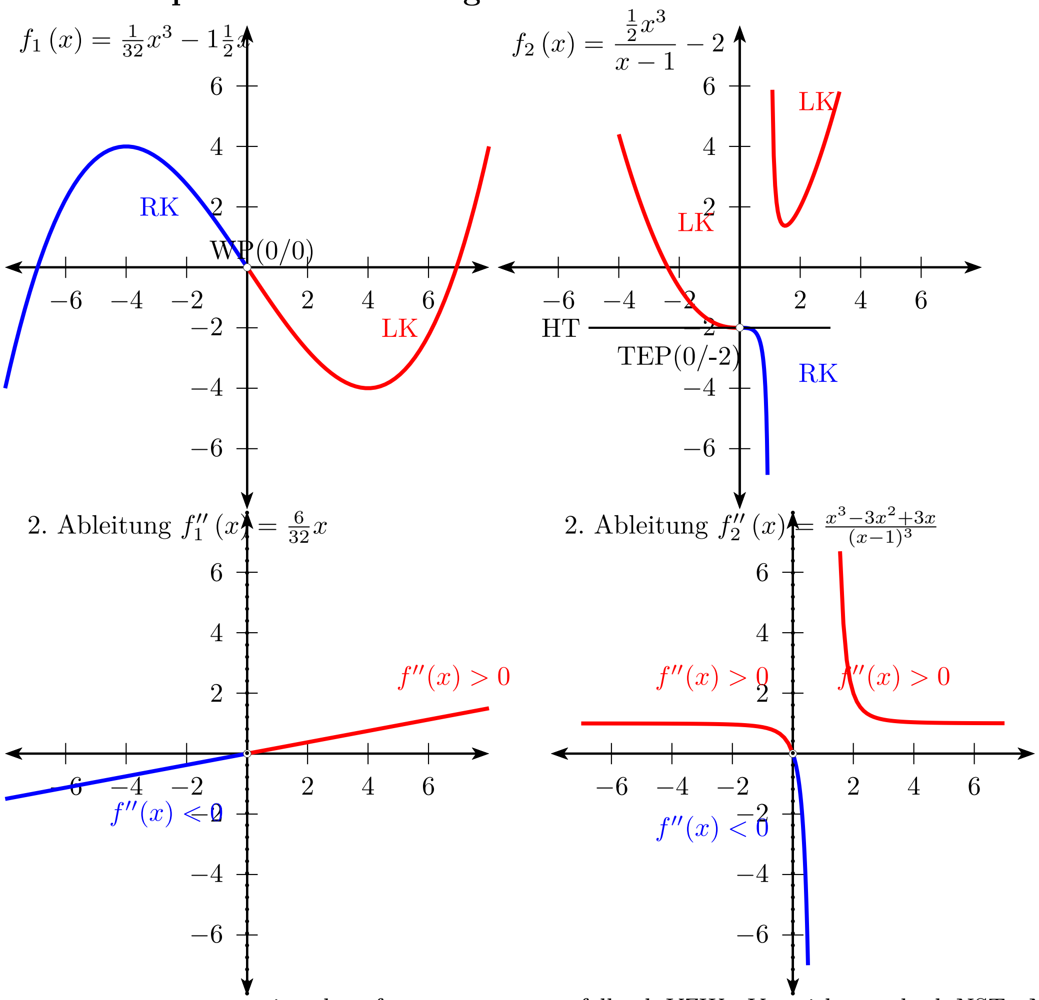
$x = 0$

$f'''(0) = \frac{3}{16} \neq 0 \Rightarrow$

Wp(0/0)

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.2.5 Graph der 2. Ableitung



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Funktion - 2. Ableitung f"(x)

Funktion $f(x)$	2. Ableitung $f''(x)$
WP	NST $f''(x) = 0$ mit VZW
LK	$f''(x) > 0$
RK	$f''(x) < 0$
TEP	NST mit VZW
VA	VA
HA	HA

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

4.2.6 Ableitung der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$

Die Ableitungen bildet man durch:Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$f(x) = ax^n \qquad f'(x) = nax^{n-1}$

$f(x) = ax \qquad f'(x) = a$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$f(x) = a \qquad f'(x) = 0$

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln abgeleitet

$f_1(x) = x^5 \qquad f_1'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$
$f_2(x) = 8x^5 \qquad f_2'(x) = 8 \cdot 5x^{5-1} = 40x^4$
$f_3(x) = 2x \qquad f_3'(x) = 2$
$f_4(x) = 5 \qquad f_4'(x) = 0$
$f_5(x) = x^5 + x^4 + x + 3 \qquad f_5'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 1$
$f_5''(x) = 20x^3 + 12x^2$

Exponentialfunktion Basis e

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$f(x) = ae^x \qquad f'(x) = ae^x$

$f(x) = ae^x + b \qquad f'(x) = ae^x$

$f(x) = 3e^x + 4 \qquad f'(x) = 3e^x$

Logarithmusfunktion Basis e

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = a\ln x \qquad f'(x) = \frac{a}{x}$

$f(x) = a\ln x + b \qquad f'(x) = \frac{a}{x}$

$f(x) = 4\ln x + 5 \qquad f'(x) = \frac{4}{x}$

Exponentialfunktion allgemein

$f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \ln a$

$f(x) = 3^x \qquad f'(x) = 3^x \ln 3$

Logarithmusfunktion allgemein

$f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$

$f(x) = \log_4 x \qquad f'(x) = \frac{1}{x\ln 4}$

Trigonometrische Funktionen

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f_2(x) = x^3 + 2 \cdot \sin x \qquad f_2'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x$

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.2.7 Ableitungsregeln

Ableiten von Summen und Differenzen

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$f_1(x) = x^5 + x^4 + x + 3$
$f_1'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 1$
$f_1''(x) = 20x^3 + 12x^2$
$f_2(x) = x^3 + 2 \cdot \sin x$
$f_2'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x$

Ableiten mit konstantem Faktor

$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

$f_1(x) = 5e^x + 4\ln x$
$f_1'(x) = 5e^x + 4\frac{1}{x}$
$f_2(x) = 5\cos x + 4\sin x$
$f_2'(x) = -5\sin x + 4\cos x$

Kettenregel

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- äußere Funktion f() ableiten
- innere Funktion g(x) unabgeleitet abschreiben
- mit der Ableitung der inneren Funktion g(x) multiplizieren (nachdifferenzieren)

$f_1(x) = e^{2x}$
äußere Funktion: $e^{(..)}$ innnere Funktion: $2x$
$f_1'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$
$f_2(x) = 3\sin 5x$
äußere Funktion: $sin(..)$ innnere Funktion: $5x$
$f_2'(x) = 3\cos 5x \cdot 5 = 15\cos 5x$
$f_3(x) = 5e^{3x^3}$
äußere Funktion: e innnere Funktion: $3x^3$
$f_3'(x) = 5e^{3x^3} \cdot 9x^2 = 45x^2e^{3x^3}$
$f_4(x) = (x^3 - x)^7$
äußere Funktion: $(...)^7$ innnere Funktion: $x^3 - x$
$f_4'(x) = 7(x^3 - x)^6 \cdot (3x^2 - 1) = (21x^2 - 7)(x^3 - x)^6$

Produktregel

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- 1. Faktor f(x) ableiten
- mal
- 2. Faktor g(x) unabgeleitet
- plus
- 1. Faktor f(x) unabgeleitet
- mal
- 2. Faktor g(x) abgeleitet

$f_1(x) = x^2e^x$
$f_1'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
$f_1'(x) = xe^x(2 + x)$
$f_2(x) = (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x$
$f_2'(x) = (2 \cdot x - 6) \cdot e^x + (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x$
$f_2'(x) = e^x(2x - 6 + x^2 - 6x + 2)$
$f_2'(x) = e^x(x^2 - 4x - 4)$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$
- Zähler f(x) ableiten
- mal
- Nenner g(x) unabgeleitet
- minus
- Zähler f(x) unabgeleitet
- mal
- Nenner g(x) abgeleitet
- durch
- Nenner g(x) im Quadrat

$f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2}$ $f'(x) = \dfrac{3 \cdot x^2 - (3x - 1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$f'(x) = \frac{3x^2 - (6x^2 - 2x)}{x^4}$
$f'(x) = \frac{-3x^2 + 2x}{(x^4)}$
$f'(x) = \dfrac{-3x(x - \frac{2}{3})}{x^4}$
$f'(x) = \dfrac{-3(x - \frac{2}{3})}{x^3}$
$f'(x) = \dfrac{-3x + 2}{x^3}$

4.2.8 Tangenten- und Normalengleichung

Tangentengleichung

Tangente an der Stelle x_0:

$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

oder

$y_0 = f(x_0)$

$m_t = f'(x_0)$

Geradengleichung:

$y = m \cdot x + t$

m_t, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$t = y_0 - m_t \cdot x_0$

m_t, t einsetzen

$y = m_t \cdot x + t$

Funktion
$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$
Tangente an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
$f'(\frac{1}{2}) = 1$
$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$g(x) = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$
$g(x) = 1(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$
$g(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$g(x) = x - \frac{1}{4}$

Normalengleichung

Normale an der Stelle x_0:

$g(x) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

oder

$y_0 = f(x_0)$

$m_t = f'(x_0)$

Steigung der Normalen

$m_n = \dfrac{-1}{m_t}$

Geradengleichung:

$y = m \cdot x + t$

m_n, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$t = y_0 - m_n \cdot x_0$

m_n, t einsetzen

$y = m_n \cdot x + t$

Funktion
$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$
Normale an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
$f'(\frac{1}{2}) = 1$
$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$
$g(x) = \frac{-1}{f'(\frac{1}{2})}(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$
$g(x) = \frac{-1}{1}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$
$g(x) = -1x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$g(x) = -1x + \frac{3}{4}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - hier klicken

4.2.9 Newtonsches Iterationsverfahren

Nullstelle einer Funktion mit dem Newtonsches Iterationsverfahren

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert x_0 wählen

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

....

Funktion

$f(x) = x^2 - 4$

$f'(x) = 2x$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert: $x_0 = 1$

$f(1) = -3$

$f'(1) = 2$

$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$

$x_1 = 1 - \frac{-3}{2}$

$x_1 = 2,5$

$f(2,5) = -32$

$f'(2,5) = 22$

$x_2 = 2,5 - \frac{f(2,5)}{f'(2,5)}$

$x_2 = 1 - \frac{-32}{22}$

$x_2 = 2,05$

$f(2,05) = -33$

$f'(2,05) = 23$

$x_3 = 2,05 - \frac{f(2,05)}{f'(2,05)}$

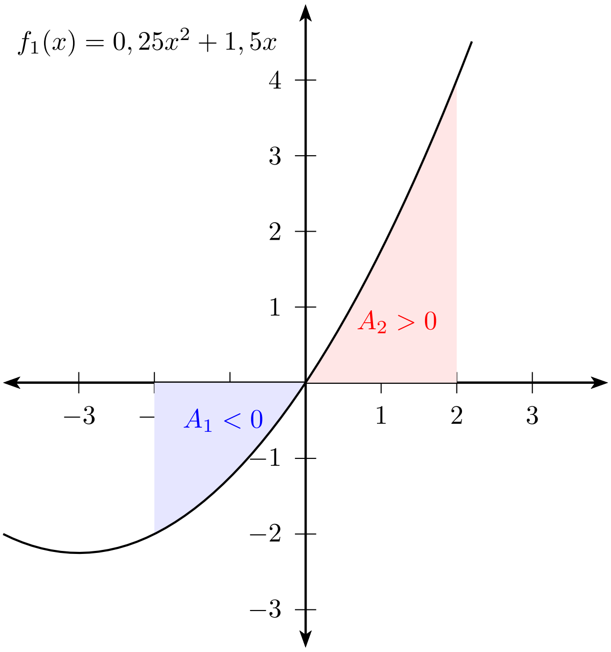
$x_3 = 2,05 - \frac{-33}{23}$

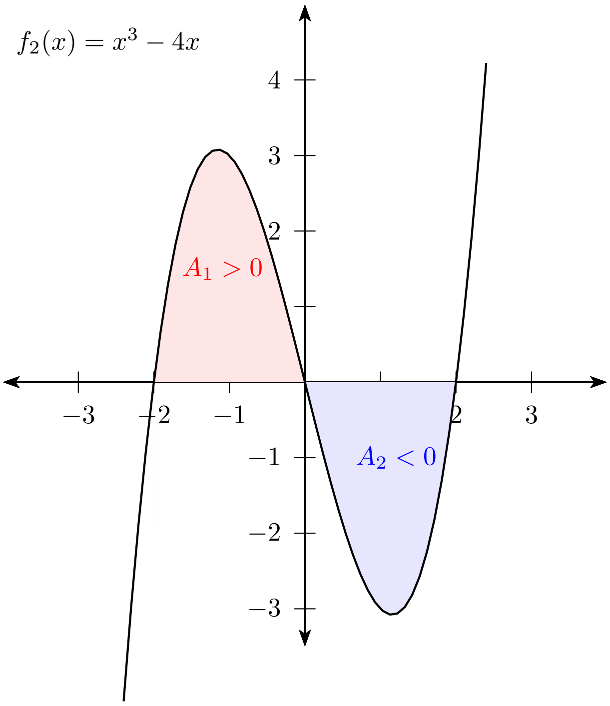
$x_3 = 2,001$

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.3 Integralrechnung

4.3.1 Definition





Hauptsatz der Integralrechnung

$F'(x) = f(x)$
Die Ableitung von $F(x)$ ist $f(x)$
$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$
Die Menge aller Stammfunktionen erhält man durch das Addieren einer Konstanten c.
$f(x) = ax^n \qquad F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$

$F_1(x) = x^2 + 2$
$F_1'(x) = 2x$
$F_1(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$
$F_2(x) = x^2 + 3$
$F_2'(x) = 2x$
$F_2(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$
Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x) = 2x$
$F(x) = x^2 + c$

Unbestimmtes Integral

$F(x) = \int f(x)\ \mathrm{dx} = F(x) + c$
Die Stammfunktion zu einer Funktion f(x) ist das unbestimmte Integral.

$f(x) = 6x^2$
$F(x) = \int 6x^2\ \mathrm{dx} = 6 \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + c$
$F(x) = 2x^3 + c$
$F(x) = \int (-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$

Bestimmtes Integral

• Flächenbilanz

$$A=\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

A ist der Flächeninhalt unter einer Kurve der Funktion f(x) im Integrationsbereich von a bis b.

Fläche oberhalb der x-Achse $\Rightarrow A>0$

Fläche unterhalb der x-Achse $\Rightarrow A<0$

Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse $\Rightarrow$ Summe der Teilflächen

• Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse

- Nullstellen berechnen
- Flächen zwischen den Nullstellen berechnen
- Beträge der Flächen addieren

Funktion
$f_1(x)=\frac{1}{4}x^2+1\frac{1}{2}x$
Stammfunktion
$F(x)=\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{4}x^2$
Fläche unterhalb der x-Achse $\Rightarrow A_1<0$

$$A_1=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}x^2+1\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{4}x^2\right]_{-2}^{0}$$
$=\left(\frac{1}{12}\cdot 0^3+\frac{3}{4}\cdot 0^2\right)-\left(\frac{1}{12}\cdot(-2)^3+\frac{3}{4}\cdot(-2)^2\right)$
$=(0)-\left(2\frac{1}{3}\right)=-2\frac{1}{3}$

Fläche oberhalb der x-Achse $\Rightarrow A_2>0$

$$A_2=\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+1\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{4}x^2\right]_{0}^{2}$$
$=\left(\frac{1}{12}\cdot 2^3+\frac{3}{4}\cdot 2^2\right)-\left(\frac{1}{12}\cdot 0^3+\frac{3}{4}\cdot 0^2\right)$
$=\left(3\frac{2}{3}\right)-(0)=3\frac{2}{3}$

Fläche unterhalb und oberhalb der x-Achse
Summe der Teilflächen (Flächenbilanz)

$$A_3=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+1\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{4}x^2\right]_{-2}^{2}$$
$=\left(\frac{1}{12}\cdot 2^3+\frac{3}{4}\cdot 2^2\right)-\left(\frac{1}{12}\cdot(-2)^3+\frac{3}{4}\cdot(-2)^2\right)$
$=\left(3\frac{2}{3}\right)-\left(2\frac{1}{3}\right)=1\frac{1}{3}$
$A_3=A_1+A_2=\left(-2\frac{1}{3}\right)+3\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$
$f_2(x)=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$
•Nullstellen: $x_1=-2 \quad x_2=0 \quad x_3=2$
$A_1=\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}$
$=\left(\frac{1}{4}\cdot 0^4-2\cdot 0^2\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4-2\cdot(-2)^2\right)$
$=(0)-(-4)=4$
$A_2=\int_{0}^{2}\left(x^3-4x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{0}^{2}$
$=\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^2\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot 0^4-2\cdot 0^2\right)$
$=(-4)-(0)=-4$
•Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse:
$A=|A_1|+|A_2|=|4|+|-4|=8$

Integralfunktion

$$F(x)=\int_k^x f(t)\,dt=[F(t)]_k^x=F(x)-F(k)$$

Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.

$F(k)=0$

$F(x)=\int_{-2}^{x}\left(2t^2+4t\right)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+2t^2\right]_{-2}^{x}$
$=\left(\frac{2}{3}x^3+2x^2\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)^2\right)$
$=\frac{2}{3}x^3+2x^2-2\frac{2}{3}$
$F(-2)=0$

Interaktive Inhalte: hier klicken hier klicken

4.3.2 Integration der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$F(x)=\int x^n\ \mathrm{dx}=\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}+c$

Zum Exponenten 1 addieren, durch den Exponenten dividieren

$F(x)=\int x\ \mathrm{dx}=\frac{1}{2}x^2+c$

$F(x)=\int ax^n\ \mathrm{dx}=a\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}+c$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$F(x)=\int a\ \mathrm{dx}=ax+c$

$$\int f(x)+g(x)\ \mathrm{dx}=\int f(x)\ \mathrm{dx}+\int g(x)\mathrm{dx}$$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln integriert

$F(x)=\int 4\ \mathrm{dx}=4x+c$
$F_2(x)=\int\left(-\frac{1}{2}x^2+2x+5\right)\mathrm{dx}=$
$F_2(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^{2+1}+2\cdot\frac{1}{2}x^{1+1}+5x+c$
$F_2(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+5x+c$

Exponentialfunktion Basis e

$F(x) = \int e^x \ dx = e^x + c$
$F(x) = \int ae^x \ dx = ae^x + c$
$F(x) = \int ae^x + b \ dx = ae^x + bx + c$

$F(x) = \int -3e^x + 2 \ dx = -3e^x + 2x + c$

Logarithmusfunktion Basis e

$F(x) = \int \ln x \ dx = x \ln x - x + c$
$F(x) = \int a \ln x \ dx = a(x \ln x - x) + c$
$F(x) = \int a \ln x + b \ dx == a(x \ln x - x) + bx + c$

$F(x) = \int 7 \ln x + 2 \ dx == 7(x \ln x - x) + 2x + c$

Rationale Funktion mit linearer Funktion im Nenner

$F(x) = \int \frac{1}{x} \ dx = \ln |x| + c$
$F(x) = \int \frac{1}{ax+b} \ dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$

$F(x) = \int \frac{1}{x+1} \ dx = \ln |x + 1| + c$
$F(x) = \int \frac{1}{2x+3} \ dx = \frac{1}{2} \ln |2x + 3| + c$

Trigonometrische Funktionen

$F(x) = \int \sin x \ dx = -\cos x + c$
$F(x) = \int \cos x \ dx = \sin x + c$

Interaktive Inhalte: hier klicken

4.3.3 Integrationsregeln

Integration von Summen und Differenzen

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int f(x) + g(x)dx$$

Integration mit konstanten Faktor

$$\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$$

Integration mit vertauschten Grenzen

$$\int_a^b f(x) \ dx = -\int_b^a f(x) \ dx$$

Integrationsgrenzen zusammenfassen

$$\int_a^b f(x) \ dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x) \ dx$$

Ableitung des Nenners im Zähler

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \ dx = \ln |f(x)| + c$$

$\int \frac{2x}{x^2} \ dx = \ln |x^2| + c$
$\int \frac{-12x^2+5}{-4x^3+5x-2} \ dx = \ln |-4x^3 + 5x - 2| + c$

Innere Funktion ist abgeleiteter Faktor

$$\int g'(x)f(g(x))\ \mathrm{dx} = F(x) + c$$

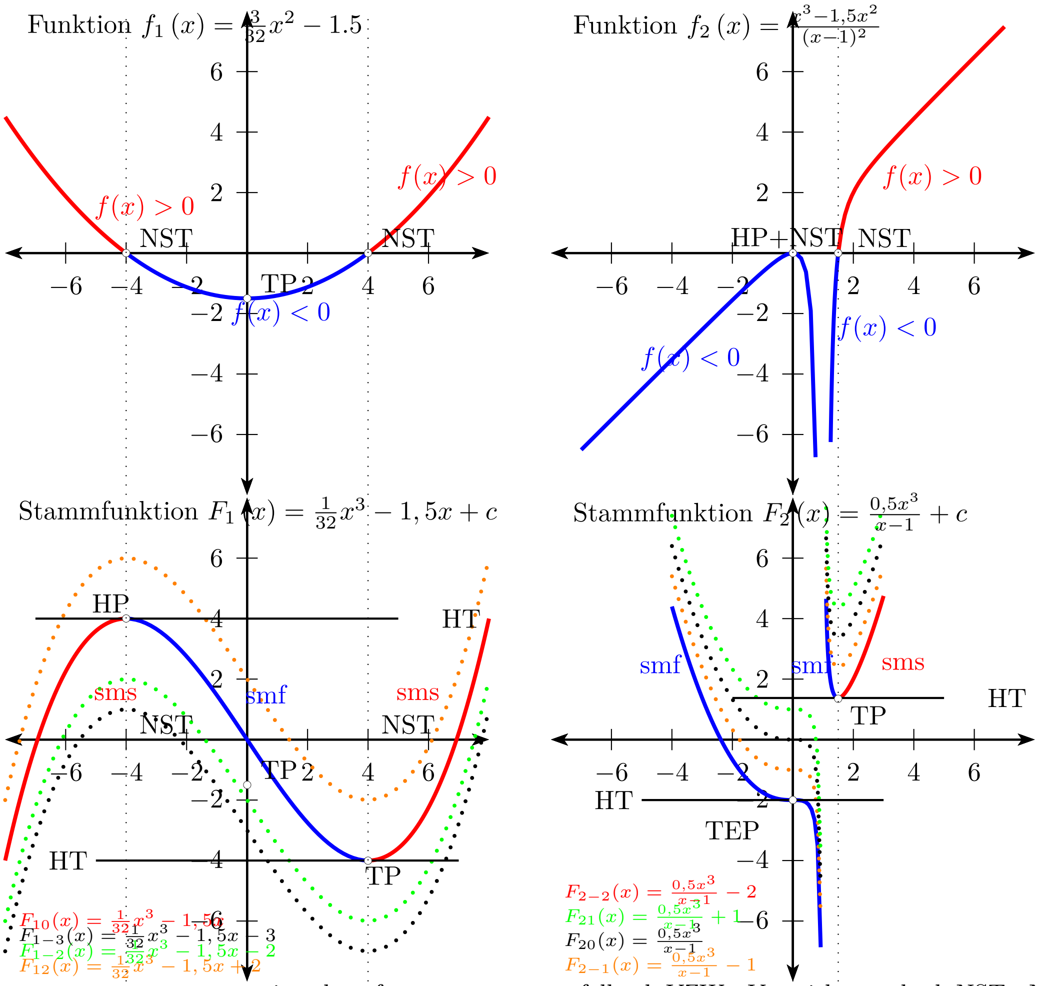
$\int 2x(x^2-3)^4\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}(x^2-3)^5 + c$
$\int 2xe^{x^2-3}\ \mathrm{dx} = e^{x^2-3} + c$
$\int 2x\sin(x^2-3)\ \mathrm{dx} = -\cos(x^2-3) + c$
$\int (3x^2-6x)e^{x^3-3x^2}\ \mathrm{dx} = e^{x^3-3x^2} + c$

Innere Funktion ist eine lineare Funktion

$$\int f(ax+b)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{a}F(x) + c$$

$\int (2x-6)^4\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}(2x-3)^5 + c = \frac{1}{10}(2x-3)^5 + c$
$\int e^{2x-6}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{2}e^{2x-6} + c$
$\int \cos(-2x-6)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\sin(-2x-3) + c$
$\int \frac{1}{5x+3}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}\ln|5x+3| + c$

4.3.4 Graph der Stammfunktion



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Zu jeder Funktion f(x) gibt es eine Menge von Stammfunktionen F(x), die um c in y-Richtung verschoben sind.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
NST $f(x) = 0$	Extremwert (HT)
VZW von $+$ nach $-$	HP
VZW von $-$ nach $+$	TP
NST ohne VZW	TEP
Extremwert	WP
$f(x) > 0$ (positiv)	sms
$f(x) < 0$ (negativ)	smf

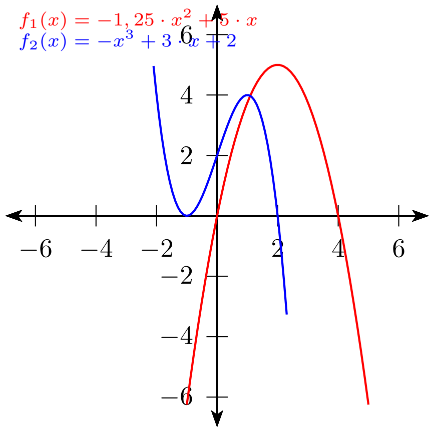
$f_1(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1.5$
$F_1(x) = \int \frac{3}{32}x^2 - 1.5 \,\mathrm{dx} = \frac{1}{32}x^3 - 1.5x + c$
$F_{12}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x + 2$ $F_{1-2}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x - 2$
$F_{1-3}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x - 3$ $F_{10}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x$

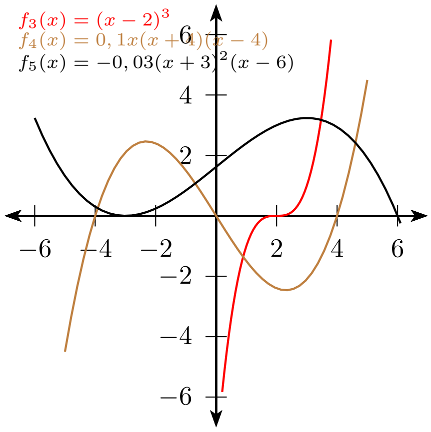
$f_1(x)$	$F_1(x)$
NST $x = -4$	Extremwert: $x = -4$
VZW von + nach - $x = -4$	HP:$x = -4$
Extremwert: $x = 0$	WP: $x = 0$
$f(x) > 0 \quad x < -4$	sms: $x < -4$

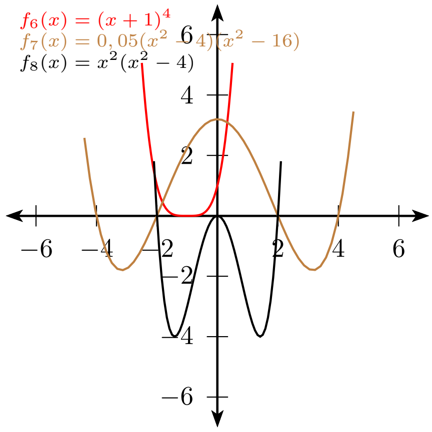
Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

4.4 Kurvendiskussion

4.4.1 Ganzrationale Funktion







Formen der Polynomfunktion - ganzrationalen Funktion

• Summendarstellung der Polynomfunktion

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x^1 + a_0$

oder

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} ...$

Die höchste Potenz (n) gibt den Grad der Polynomfunktion an.

• Produktdarstellung (faktorisierte Form) der Polynomfunktion

Ist der Grad des Polynoms gleich der Anzahl der (reellen)Nullstellen, kann man die Funktion in faktorisierter Form schreiben.

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...$

Nullstellen: $x_1, x_2, x_3 ...$

Linearfaktoren: $(x-x_1), (x-x_2)...$

a=Koeffizient der höchsten Potenz

Grad 1: Lineare Funktion

$f(x) = ax + b$

Grad 2: Quadratische Funktion

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Grad 3: Kubische Funktion

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

Grad 5:

$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$

Summen- in Produktdarstellung

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$

$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$

$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$

$x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3

Faktorisierte Form:

$f_4(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$

$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$

$u_1 = 16 \qquad u_2 = 4$

$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_3 = 2 \qquad x_4 = -2$

Faktorisierte Form:

$f_7(x) = \frac{1}{20}(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$

Produkt- in Summendarstellung

$f_3(x) = (x-2)(x-2)(x-2) = (x-2)^3$

$f_3(x) = x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

$f_5(x) = 0,1x(x+4)(x-4) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$

$f_6(x) = (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$f_7(x) = 0,05(x^2-4)(x^2-16) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$

$f_8(x) = x^2(x^2-4) = x^4 - 4x^2$

Definitions- und Wertebereich

• Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

• Wertebereich

- höchster Exponent ungerade:

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

- höchster Exponent gerade:

$\mathbb{W} =$ [absoluter Tiefpunkt;∞[

$\mathbb{W} =]-\infty$;absoluter Hochpunkt]

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$
absoluter Hochpunkt: (2/5) höchster Exponent 2 (gerade)
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 5[$
$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$
höchster Exponent 3 (ungerade Zahl)
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$f_5(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$
absoluter Tiefpunkt aus der Kurvendiskussion
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1\frac{4}{5}, \infty[$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$f(-x) = -f(x)$

$f(x)$ hat nur ungerade Exponenten

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$f(-x) = f(x)$

$f(x)$ hat nur gerade Exponenten

$f_1(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
$f_2(-x) = -1 \cdot 1(-x)^3 + 3 \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
$f_4(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$
$f_4(-x) = 0,1(-x)^3 - 1\frac{3}{5} \cdot (-x)$
$f_4(-x) = -\left(0,1 \cdot x^3 - 1\frac{3}{5} \cdot x\right)$
$f_4(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung
$f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$
$f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot (-x)^4 - 1 \cdot (-x)^2 + 3\frac{1}{5}$
$f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot x^4 - 1 \cdot x^2 + 3\frac{1}{5}$
$f_7(-x) = f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

• Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen. (siehe Algebra-Gleichungen)

$f(x) = 0 \quad ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}... = 0$

• höchster Exponent ungerade

$1 \leqq$ Anzahl der Nullstellen $\leqq$ Grad des Polynoms

• höchster Exponent gerade

$0 \leqq$ Anzahl der Nullstellen $\leqq$ Grad des Polynoms

Faktorisierte Polynomfunktion

• Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.

$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)... = 0$

Nullstellen: $x_1, x_2, x_3...$

Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.

$f_3(x) = (x-2)^3 \quad x_{123} = 2$ 3-fache Nullstelle

$f_5(x) = -0,03(x+3)^2(x-6)$

$x_1 = -3$ 2-fache Nullstelle

$x_{23} = 6$ 1-fache Nullstelle

Funktionsterm gleich Null setzen.

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = 0$

$x(-1\frac{1}{4}x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad -1\frac{1}{4}x + 5 = 0$

$-1\frac{1}{4}x + 5 = 0 \quad \vee \quad x = 4$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

Faktorisierte Form: $f_1(x) = -1\frac{1}{4}x(x-4)$

$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:$x_1 = -1$

$$\begin{array}{llll}
(-x^3 & & +3x & +2 \quad) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\ \hline
 & x^2 & +3x & +2 \\
 & -(x^2 & +x) & \\ \hline
 & & 2x & +2 \\
 & & -(2x & +2) \\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \quad \vee \quad x_2 = -1 \qquad x_3 = 2$$

Faktorisierte Form: $f_2(x) = -(x+1)^2(x-2)$

$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$

$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$

$x_2 = 4 \quad x_3 = -4$

Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3

Faktorisierte Form: $f_5(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$

$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$

$u = x^2 \quad u^2 = x^4$

$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$

$u_1 = 16 \quad u_2 = 4 \quad \vee$

$x^2 = 16 \quad x = \pm\sqrt{16} \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -4$

$x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{4} \quad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$

Faktorisierte Form: $f_7(x) = \frac{1}{20}(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei ganzrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+ f(x)>0 Graph oberhalb der x-Achse

- f(x)<0 Graph unterhalb der x-Achse

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$

	$x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0;4[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]2;\infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

Faktorisierte Form:

$f_5(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$

Nullstellen: $x_1 = 0 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

$-5 < -4 \qquad f_5(-5) = -4,5$

	$x <$	-4	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-4;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-4[\quad \cup \quad]0;4[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

Grenzwert - Verhalten im Unendlichen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x^1 + a_0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$

Das Vorzeichen des Glieds mit der höchsten Potenz und der Grad des Polynoms bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
+	ungerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
-	gerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$
+	ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$

Glied mit der höchsten Potenz: $-1\frac{1}{4}x^2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$

Glied mit der höchsten Potenz: $-x^3$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

Ableitung

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$

Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen.

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} ... + a_2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + a_1$

$f(x) = ax^n \qquad f'(x) = nax^{n-1}$

Grad 1: Lineare Funktion

$f(x) = ax + b \qquad f'(x) = a$

Grad 2: Quadratische Funktion

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f'(x) = 2ax + b$

Grad 3: Kubische Funktion

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$
$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$
$f_1''(x) = -2\frac{1}{2}$
$f_1'''(x) = 0$

$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$
$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$
$f_2''(x) = -6x = -6x$
$f_2'''(x) = -6$

Extremwerte und die 2.Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0 (LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0 (RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5 = 0$
$-2\frac{1}{2}x + 5 = 0 \qquad / -5$
$-2\frac{1}{2}x = -5 \qquad / : (-2\frac{1}{2})$
$x = \frac{-5}{-2\frac{1}{2}}$
$x = 2$
$f_1''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: (2/5)

$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = 0$
$-3x^2 + 3 = 0 \qquad / -3$
$-3x^2 = -3 \qquad / : (-3)$
$x^2 = \frac{-3}{-3}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$f_2''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(-1/0)$
$f_2''(1) = -6$
$f_2''(1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: (1/4)

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) > 0$

streng monoton fallend

$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0$

$f_2'(x) = -3x^2 + 3$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

streng monoton steigend

$x \in]-1; 1[\quad f'(x) > 0$

streng monoton fallend

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f'(x) < 0$

Wendepunkte und 3.Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

$f_1''(x) = 0$

kein Wendepunkt

$f_2''(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f'''(0) = 2$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: (0/2)

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.
Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.
Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht
Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_2''(x) = -6x$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Stammfunktion von f(x)

Stammfunktionen bildet man durch: zum Exponent 1 addieren, durch den Exponenten dividieren.

$f(x) = ax^n \qquad F(x) = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + c$

Unbestimmtes Integral: $F(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c$

$F_1(x) = \int (-1\frac{1}{4}x^2 + 5x)dx = -\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$

$F_2(x) = \int \left(-x^3 + 3x + 2\right) dx = -\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

Bestimmtes Integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

$A_1 = \int_0^4 \left(-1\frac{1}{4}x^2 + 5x\right) dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$

$= \left(-\frac{5}{12} \cdot 4^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 4^2\right) - \left(-\frac{5}{12} \cdot 0^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$

$= \left(13\frac{1}{3}\right) - (0) = 13\frac{1}{3}$

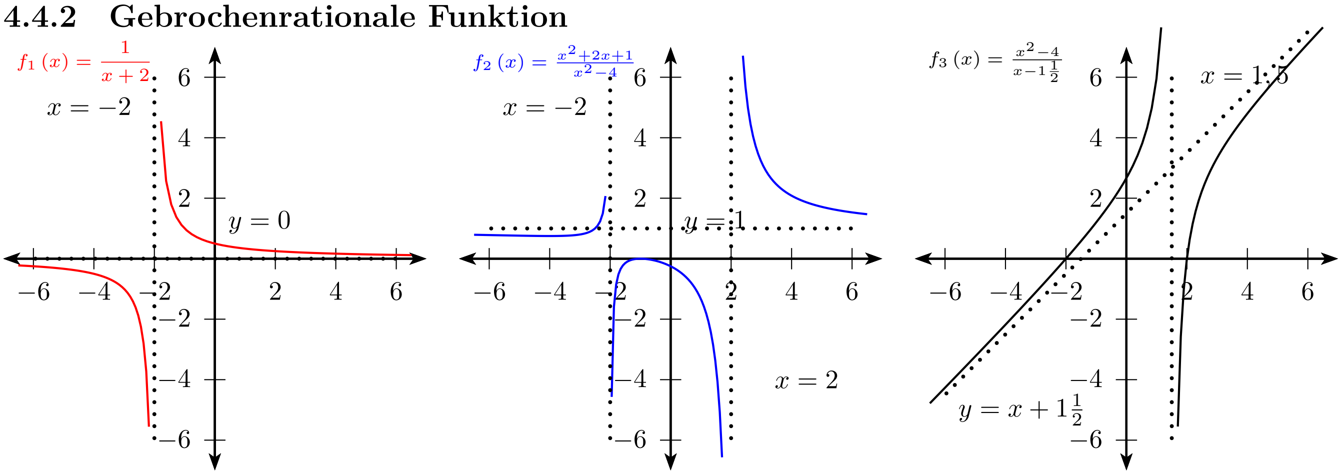
$A_2 = \int_{-1}^2 \left(-x^3 + 3x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2$

$= \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 1\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right)$

$= (6) - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6\frac{3}{4}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Kurvendiskussion -

4.4.2 Gebrochenrationale Funktion



Formen der gebrochenrationalen Funktion

Summendarstellung der gebrochenrationale Funktion

$f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$

$= \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0}$

Zählerpolynom vom Grad n

$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

Nennerpolynom vom Grad m:

$N(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0$

Produktdarstellung (faktorisierte Form) der gebrochenrationale Funktion

$f(x) = a\dfrac{(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)...}{(x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)...}$

$z_1, z_2, z_3...$ Nullstellen des Zählers

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners

$f_2(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Zählerpolynom:$Z(x) = x^2 + 2x + 1$ Zählergrad:2

Nennerpolynom:$N(x) = x^2 - 4$ Nennergrad:2

Faktorisierte Form:

$f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$

$f_3(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$

Funktion nach der Polynomdivision:

$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$

Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich:

Nullstellen des Nennerpolynoms ausschließen.

Nennerpolynom: $N(x) = 0$

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners (Definitionslücken)

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{n_0, n_1, n_2..\}$

(siehe Algebra - Gleichungen)

Wertebereich:

Bestimmung nur nach Kurvendiskussion möglich.

$f_1(x) = \dfrac{1}{(x+2)}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f_2(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Nenner Null setzen

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$f(-x) = f(x)$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Zählerpolynom gleich Null setzen.

Zählerpolynom: $Z(x) = 0$

$z_1, z_2, z_3 ...$ Nullstellen des Zählers

(siehe Algebra - Gleichungen)

$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$

Zählerpolynom gleich Null setzen:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_1 = -1 \quad x_2 = -1$

$x_1 = -1;$ 2-fache Nullstelle

Verhalten im Unendlichen - Grenzwert - Asymptoten

• Zählergrad>Nennergrad

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

Das Vorzeichen der Glieder mit der höchsten Potenzen und der Grad der höchsten Exponenten, bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(\infty)^n}{(\infty)^m} = \pm\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = \pm\infty$

• Zählergrad=Nennergrad+1

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Polynomdivision - schiefe Asymptote

• Zählergrad=Nennergrad

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

horizontale Asymptote $y = \frac{a_n}{b_m}$

• Zählergrad<Nennergrad

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

horizontale Asymptote $y = 0$

Zählergrad < Nennergrad

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x+2} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

Zählergrad = Nennergrad

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1x^2 + 2x + 1}{1x^2 - 4} = \frac{1}{1} = 1$

Horizontale Asymptote: $y = 1$

Zählergrad = Nennergrad+1

$f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(\infty)^2}{(\infty)^1} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(-\infty)^2}{(-\infty)^1} = -\infty$

oder

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}{x(1 - \frac{1\frac{1}{2}}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}{x(1 - \frac{1\frac{1}{2}}{x})} = -\infty$

Polynomdivision :

$$
\begin{array}{llll}
(x^2 & & -4 &) : (x - 1\frac{1}{2}) = x + 1\frac{1}{2} \\
-(x^2 & -1\frac{1}{2}x) & & \\
\hline
 & 1\frac{1}{2}x & -4 & \\
 & -(1\frac{1}{2}x & -2\frac{1}{4}) & \\
\hline
 & & -1\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x - 1\frac{1}{2}}$

Schiefe Asymptote: $y = x + 1\frac{1}{2}$

Verhalten an den Definitionslücken - Grenzwert - Asymptoten

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1..\}$

$x_0, x_1..$ sind Definitionslücken von f(x)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$

Vertikale Asymptote: $x = x_0$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

Ableitung

Die Ableitungen bildet man durch die Quotientenregel,

$f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$f_1'(x) = \frac{0\cdot(x+2)-1\cdot 1}{(x+2)^2}$
$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$
$= \frac{-1}{(x+2)^2}$
$= \frac{-1}{(x+2)^2}$
$f''(x) = \frac{0\cdot(x^2+4x+4)-(-1)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{0-(-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{2(x+2)}{(x+2)^4}$
$= \frac{2}{(x+2)^3}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$
$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x^2-4)-(x^2+2x+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$
$= \frac{(2x^3+2x^2-8x-8)-(2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$
$= \frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0 (LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0 (RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_2'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$
$-2x^2 - 10x - 8 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$
$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$
$x_{1/2} = \frac{10 \pm 6}{-4}$
$x_1 = \frac{10+6}{-4} \qquad x_2 = \frac{10-6}{-4}$
$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$
$f''(-4) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-4/\frac{3}{4})}$
$f''(-1) = -6$
$f''(-1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: } (-1/0)}$

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen (x_0, x_1..).

In diesen Nullstellen (x_0, x_1..) kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_1'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$
Zaehler $= 0$
keine Lösung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = -2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[f'(x) < 0$ smf

Wendepunkt und die 3.Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen (x_0, x_1..).

Einsetzen der Nullstellen x_0, x_1.. in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.
Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.
Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht
Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3}$

$Zaehler = 0$

keine Lösung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_3 = -2$; 1-fache Nullstelle

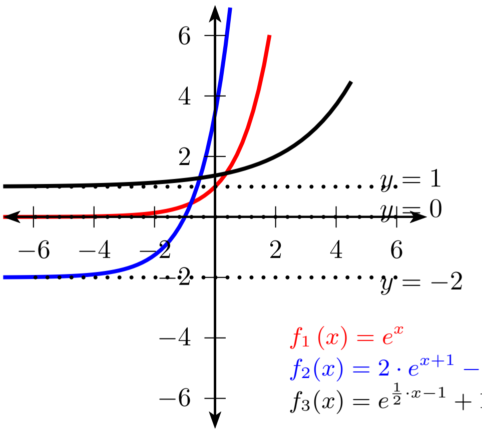
	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

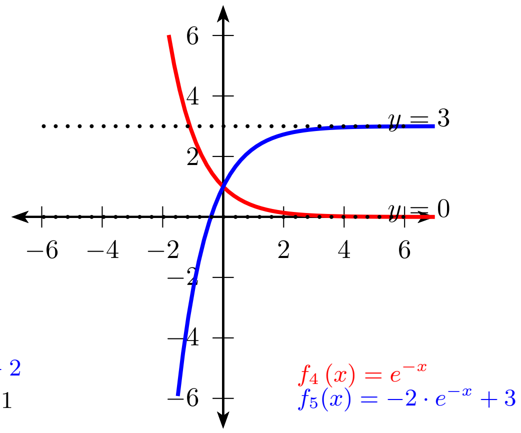
$x \in]-2; \infty[$ $f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -2[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Kurvendiskussion -

4.4.3 Exponentialfunktion (Basis e)





Formen der Exponentialfunktion

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$

Allgemeine Exponentialfunktion

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

(siehe Funktionen - Exponentialfunktion)

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$

$f_4(x) = e^{-x}$

$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = e^x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$a > 0 \qquad \mathbb{W} = [d; \infty[$

$a < 0 \qquad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [-2; \infty[$

$f_4(x) = e^{-x} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^+$

$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; 3]$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$f(x) = e^x \qquad e^x > 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen

$f(x) = ae^{(b(x-c))} + d$

$ae^{b(x-c)} + d = 0 \qquad / - d$

$ae^{b(x-c)} = -d \qquad / : a$

$e^{b(x-c)} = \frac{-d}{a} \qquad / \ln$

$\frac{-d}{a} > 0$

$b(x-c) = \ln\left(\frac{-d}{a}\right) \qquad / : b \qquad / + c$

$x = \frac{\ln\left(\frac{-d}{a}\right)}{b} + c$

$\frac{-d}{a} \leq 0 \qquad$ keine Nullstellen

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$

$2 \cdot e^{(x+1)} - 2 = 0$

$2 \cdot e^{(x+1)} - 2 = 0 \qquad / + 2$

$2 \cdot e^{(x+1)} = +2 \qquad / : 2$

$e^{(x+1)} = 1 \qquad / \ln$

$x + 1 = \ln(1) \qquad / - 1$

$x = -1$

$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1$

$e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 = 0 \qquad / - 1$

$e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} = -1$

$-1 < 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen

Grenzwert - Asymptoten

$f(x) = e^x$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad$ horizontale Asymptote y=0

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d$

Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:

$\lim\limits_{x\to\infty} b(\infty - c) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^{\infty} = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} a\infty + d = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} b(-\infty - c) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} a \cdot 0 + d = d \qquad \Rightarrow$ HA: $y = d$

a	b	Grenzwert $\to +\infty$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	+	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	-	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$

a	b	Grenzwert $\to -\infty$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	+	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
+	-	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	-	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \infty + 1 = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^{\infty} = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot \infty - 2 = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} (-\infty + 1) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot 0 - 2 = -2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = -2 \qquad HA : y = -2$

$f_4(x) = e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \qquad HA : y = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$

$\lim\limits_{x\to\infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 = 3 \qquad HA : y = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 = +\infty$

Ableitung

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$

Ableitung mit der Kettenregel

$f(x) = e^{bx} \qquad f'(x) = be^{bx} \qquad f''(x) = b^2 e^{bx}$

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \qquad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$

$f''(x) = a \cdot b^2 e^{b(x-c)}$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} \qquad f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1}$

$f_4(x) = e^{-x} \qquad f_4'(x) = -e^{-x} \qquad f_4'(x) = e^{-x}$

$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$

$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 \qquad f_3'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1}$

$f_3''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1}$

Monotonieverhalten

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$e^x > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$

$e^{b(x-c)} > 0$

$a \cdot b > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend (sms)

$a \cdot b < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend (smf)

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow$ sms
$f_4'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow$ smf
$f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x} > 0 \Rightarrow$ sms
$f_3'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} > 0 \Rightarrow$ sms

Ableitung

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

Ableitung mit Kettenregel

$f(x) = e^{ax} \qquad f'(x) = ae^{ax}$

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \qquad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1}$
$f_4(x) = e^{-x} \qquad f_4'(x) = -e^{-x}$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$

Krümmungsverhalten

$f(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$

$e^x > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$f''(x) = a \cdot b^2 e^{b(x-c)}$

$e^{b(x-c)} > 0$

$a > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$a < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow$ LK
$f_4''(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow$ LK
$f_5''(x) = -2 \cdot e^{-x} < 0 \Rightarrow$ RK
$f_3''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} > 0 \Rightarrow$ LK

Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

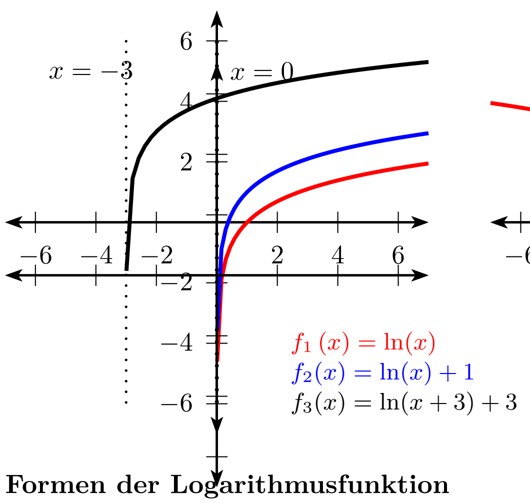
$f(x) = e^x \qquad F(x) = e^x + k$

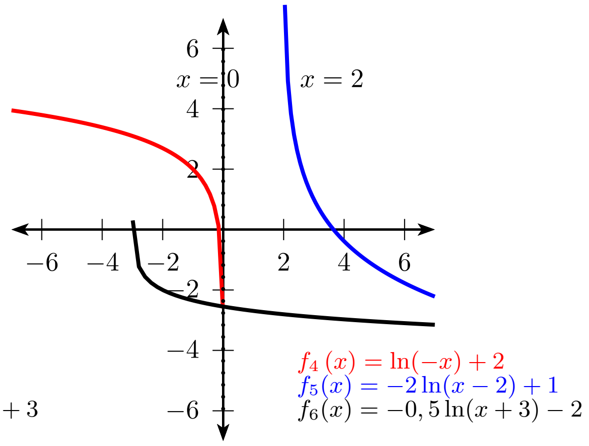
$f(x) = ae^{b(x-c)} \qquad F(x) = \frac{a}{b}e^{b(x-c)} + k$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad F_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2x + c$
$f_4(x) = e^{-x} \qquad F_4(x) = -e^{-x} + c$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad F_5(x) = 2 \cdot e^{-x} + 3x + c$
$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} + 1$
$F_3(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} + x + c = 2e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} + x + c$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

4.4.4 Logarithmusfunktion (Basis e)





Formen der Logarithmusfunktion

Logarithmusfunktion

$f(x)=\ln x$

Allgemeine Logarithmusfunktion

$f(x)=a\ln(b(x-c))+d$

(siehe Funktionen - Logarithmusfunktion)

$f_1(x)=\ln(x)$
$f_2(x)=\ln(x)+1$
$f_3(x)=\ln(x+3)+3$
$f_4(x)=ln(-x)+2$
$f_5(x)=-2\ln(x-2)+1$
$f_6(x)=-0,5\ln(x+3)-2$

Definitions- und Wertebereich

$f(x)=\ln x$

$\mathbb{W}=\mathbb{R}$

$\mathbb{D}=\mathbb{R}^+$

$f(x)=a\ln b(x-c)+d$

$\mathbb{W}=\mathbb{R}$

Definitionsbereich: $bx-c>0$

- $b>0 \qquad \mathbb{D}=]c;\infty[$
- $b<0 \qquad \mathbb{D}=]-\infty;c[$

$f_1(x)=\ln(x) \qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}^+$
$f_2(x)=\ln(x)+1 \qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}^+$
$f_3(x)=\ln(x+3)+3 \qquad \mathbb{D}=]-3;\infty[$
$f_4(x)=\ln(-x)+2 \qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}^-$
$f_5(x)=-2\ln(x-2)+1 \qquad \mathbb{D}=]2;\infty[$
$f_6(x)=-0,5\ln(x+3)-2 \qquad \mathbb{D}=]-3;\infty[$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$f(x)=\ln(x)$

$\ln(x)=0 \quad /e$

$x=e^0$

$x=1$

$f(x)=a\ln(b(x-c))+d$

$a\ln(b(x-c))+d=0 \qquad /-d$

$a\ln(b(x-c))=-d \qquad /:a$

$\ln(b(x-c))=\frac{-d}{a} \qquad /e$

$b(x-c)=e^{\left(\frac{-d}{a}\right)} \qquad /:b \qquad /+c$

$x=\frac{e^{\left(\frac{-d}{a}\right)}}{b}+c$

$f_3(x)=\ln(x+3)+3$
$\ln(x+3)+3=0$
$\ln(x+3)+3=0 \qquad /-3$
$\ln(x+3)=-3 \qquad /e^{\cdot\cdot}$
$x+3=e^{-3} \qquad /-3$
$x=e^{-3}-3$
$x=-2,95$
$f_6(x)=-0,5\ln(x+3)-2$
$-\frac{1}{2}\cdot\ln(x+3)-2=0$
$-\frac{1}{2}\cdot\ln(x+3)-2=0 \qquad /+2$
$-\frac{1}{2}\cdot\ln(x+3)=+2 \qquad /:-\frac{1}{2}$
$\ln(x+3)=-4 \qquad /e^{\cdot\cdot}$
$x+3=e^{-4} \qquad /-3$
$x=e^{-4}-3$
$x=-2,98$

Grenzwert - Asymptoten

$f(x) = \ln(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow$ vertikale Asymptote: $x = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d$

Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:

$\lim\limits_{x\to\infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} \ln\infty = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} a\infty + d = \infty$

$\lim\limits_{x\to c^+} b(c^+ - c) = 0^+ \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \ln 0^+ = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} a\cdot(-\infty) + d = -\infty \quad \Rightarrow$ VA: $x = c$

a	b	Grenzwert $\to \pm\infty$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x\to\infty} a\ln b(x-c) + d = \infty$	keine
-	+	$\lim\limits_{x\to\infty} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim\limits_{x\to-\infty} a\ln b(x-c) + d = \infty$	keine
-	-	$\lim\limits_{x\to-\infty} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	keine

a	b	Grenzwert $\to c$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x\to c^+} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	$x = c$
-	+	$\lim\limits_{x\to c^+} a\ln b(x-c) + d = \infty$	$x = c$
+	-	$\lim\limits_{x\to c^-} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	$x = c$
-	-	$\lim\limits_{x\to c^-} a\ln b(x-c) + d = \infty$	$x = c$

$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1 \qquad \mathbb{D} =]2;\infty[$

$\lim\limits_{x\to\infty} -2\ln(x-2) + 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \infty - 2 = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} \ln\infty = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} -2\cdot\infty + 1 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} -2\ln(x-2) + 1 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} -2\ln(x-2) + 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} (2^+ - 2) = 0^+ \quad \lim\limits_{x\to 2^+} \ln 0^+ = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} -2\cdot(-\infty) - 2 = \infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} -2\ln(x-2) + 1 = \infty \qquad VA: x = 2$

$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-x) + 2 = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(-x) + 2 = -\infty \qquad VA: x = 0$

Ableitung

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

Ketten- und Quotientenregel :

$f(x) = \ln bx \qquad f'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f'(x) = \frac{a\cdot b}{b(x-c)}$

$f''(x) = \frac{-a\cdot b^2}{(b(x-c))^2}$

$f_2(x) = \ln(x) + 1 \qquad f_2'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f_2''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f_3(x) = \ln(x+3) + 3 \qquad f_3'(x) = \frac{1}{x+3} = (x+3)^{-1}$

$f_3''(x) = -(x+3)^{-2} = \frac{-1}{(x+3)^2}$

$f_4(x) = ln(-x) + 2 \qquad f_4'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f_4''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1 \qquad f_5'(x) = \frac{-2}{(x-2)} = -2(x-2)^{-1}$

$f_5''(x) = 2(x-2)^{-2} = \frac{2}{(x-2)^2}$

Monotonieverhalten

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\frac{1}{x} \Rightarrow$ streng monoton steigend $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f'(x) = \frac{a\cdot b}{b(x-c)}$

$b(x-c) > 0$

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$f_2'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ sms

$f_3'(x) = \frac{1}{x+3} > 0 \Rightarrow$ sms

$f_5'(x) = \frac{-2}{(x-2)} < 0 \Rightarrow$ smf

Krümmungsverhalten

$f(x) = \ln(x) \qquad f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$\frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$

$(b(x-c))^2 > 0$

$a > 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$a < 0 \Rightarrow$ linkssgekrümmt (LK)

$f_2''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ RK

$f_3''(x) = -(x+3)^{-2} = \frac{-1}{(x+3)^2} < 0 \Rightarrow$ RK

$f_5''(x) = 2(x-2)^{-2} = \frac{2}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow$ LK

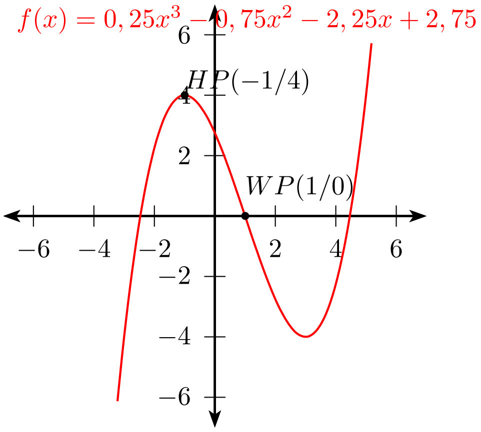
Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

$f(x) = \ln(x) \qquad F(x) = x\ln(x) - x + c$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

4.5 Aufstellen von Funktionsgleichungen

4.5.1 Ganzrationale Funktion



Eine ganzrationale Funktion vom Grad n ist durch n+1 Bedingungen eindeutig festgelegt.
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2}... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$
Um die n+1 Koeffizienten $(a_n, a_{n-1}.., a_0)$ berechnen zu können, sind n+1 Gleichungen (n+1 Bedingungen) nötig.

Funktion vom Grad 2

Um die 3 Koeffizienten (a,b,c) berechnen zu können, sind 3 Gleichungen (3 Bedingungen) nötig.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

Funktion vom Grad 3

Um die 4 Koeffizienten (a,b,c,d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen (4 Bedingungen) nötig.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Funktion vom Grad 4

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Gesucht ist ein Polynom 3. Grades, das bei x = 1 einen Wendepunkt hat, im Punkt P(-1/4) ein Extremum besitzt und bei x = 1 die x-Achse schneidet.

Polynom 3. Grades
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$
Um die 4 Koeffizienten (a,b,c,d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen nötig.
1. Bedingung: Wendepunkt bei $x = 1$
$f''(1) = 0 \qquad 6a \cdot 1 + 2b = 0$
2. Bedingung: Punkt $P(-1/4)$
$f(-1) = 4 \qquad a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 4$
3. Bedingung: Extremwert an der Stelle $x_0 = 1$
$f'(-1) = 0 \qquad 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$
4.Bedingung: Nullstelle an der Stelle $x_0 = 1$
$f(1) = 0 \qquad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$
Lineares Gleichungssystem lösen:
$6a + 2b = 0$
$-a + b - c + d = 4$
$3a - 2b + c = 0$
$a + b + c + d = 0$
$a = \frac{1}{4}$
$b = -\frac{3}{4}$
$c = -2\frac{1}{4}$
$d == 2\frac{3}{4}$
Funktionsgleichung:
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$

Bedingungen für die Funktion	Gleichung
Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$
Nullstelle an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$
Punkt auf der y-Achse y_0	$f(0) = y_0$
Extremwert an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Horizontale Tangente an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Berührpunkt der x-Achse an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$ $f'(x_0) = 0$
Tangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Normale: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = -\frac{1}{m}$
Wendepunkt an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$
Terrassenpunkt an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m an der Stelle x_0	$f'(x_0) = m$
Hoch-/Tiefpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$
Terrassenpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Wendepunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f''(x_0) = 0$
Wendetangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m im Punkt P(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$	Glieder mit ungeraden Exponenten entfallen
Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$	Glieder mit geraden Exponenten entfallen

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - hier klicken

5 Stochastik

5.1 Statistik

5.1.1 Mittelwert - Median - Modalwert

Noten in Mathematik: 4,3,5,3,3,5,2,4

Arithmetisches Mittel

Durchschnittswert $\bar{x}$ der Datenreihe $x_1, x_2, x_3....x_n$
n - Anzahl der Elemente
$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3....x_n)$
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Mittelwert:
$\bar{x} = \frac{1}{8}(4+3+5+3+3+5+2+4) = 3,625$

Median

Zentralwert der geordneten Datenreihe
n - Anzahl der Elemente
$x_{med} = \frac{x_{n/2}+x_{n/2+1}}{2}$ wenn n gerade
$x_{med} = x_{(n+1)/2}$ wenn n ungerade

geordnete Datenreihe

x_1	2
x_2	3
x_3	3
x_4	3
x_5	4
x_6	4
x_7	5
x_8	5

Median:
$x_{med} = \frac{3+4}{2} = 3,5$

Spannweite

Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der geordneten Datenreihe
$d = x_{max} - x_{min}$

Spannweite:
$d = 5 - 2 = 3$

Häufigkeitstabelle - Modalwert

Wert aus der Datenreihe, der am häufigsten vorkommt

Häufigkeit

Anzahl	Noten
1	2
3	3
2	4
2	5

$x_{Mod} = 3$

Interaktive Inhalte: hier klicken

5.2 Kombinatorik

5.2.1 Grundlagen

	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung
Permutation	$n!$	$\frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!}$
Variation	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$	n^k
Kombination	$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Fakultät

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

$0! = 1$
$1! = 1$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad n$ über k

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$
$\binom{40}{38} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{(40-38)! \cdot 38!} = \frac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780$
$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$

Interaktive Inhalte: $n!$ -

5.2.2 Anzahl der Anordungen - Permutation

Anzahl der Anordungen ohne Wiederholung - alle Elemente verschieden

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,c bilden?
abc *acb* *bac* *bca* *cab* *cba*
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Anzahl der Anordungen ohne Wiederholung - nicht alle Elemente verschieden

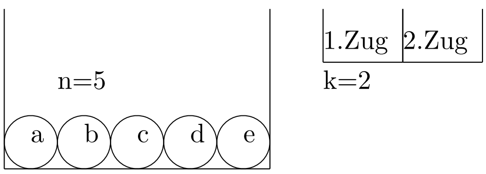
$\frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_m!}$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,b,b,b bilden?
a,b,b,b,b b,a,b,b,b b,b,a,b,b b,b,b,a,b b,b,b,b,a
$\frac{5!}{4!} = 5$

Interaktive Inhalte: $n!$ -

5.2.3 Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

	ab	ac	ad	ae
ba		bc	bd	be
ca	cb		cd	de
da	db	dc		de
ea	eb	ec	ed	

1. Zug: 5 Möglichkeiten
2. Zug: 4 Möglichkeiten

$5 \cdot 4 = 20 = \frac{5!}{(5-2)!}$ Möglichkeiten

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$n^k$$

aa	ab	ac	ad	ae
ba	bb	bc	bd	be
ca	cb	cc	cd	de
da	db	dc	dd	de
ea	eb	ec	ed	ee

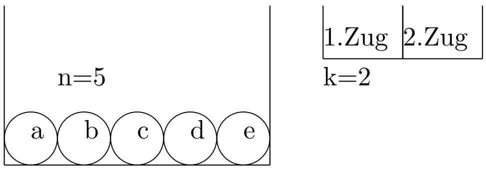
1. Zug: 5 Möglichkeiten
2. Zug: 5 Möglichkeiten

$5 \cdot 5 = 25 = 5^2$ Möglichkeiten

Interaktive Inhalte: $\frac{n!}{(n-k)!}$ - n^k -

5.2.4 Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad n \text{ über } k$$

ab	ac	ad	ae
	bc	bd	be
		cd	de
			de

$\frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$ Möglichkeiten

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$\binom{n+k-1}{k}$$

aa	ab	ac	ad	ae
	bb	bc	bd	be
		cc	cd	de
			dd	de
				ee

$\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ Möglichkeiten

Interaktive Inhalte: $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ - $\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$ -

5.3 Wahrscheinlichkeit

5.3.1 Zufallsexperiment

Ergebnis - Ereignis

- Ein Zufallsexperiment ist beliebig oft wiederholbar
- Die Elementarergebnisse (Stichproben, Ausgänge) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...$ des Zufallsexperiment sind nicht vorhersagbar
- Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnisraum Ω
- $|\Omega|$ ist die Anzahl der Ergebnisse von Ω
- Ein Ergeignis A ist eine Teilmenge von Ω
- $|A|$ ist die Anzahl der Elemente von A
- Die Menge aller Ergeinisse heißt Ereignisraum P

Werfen einer Münze
Ergebnis: $\omega_1 = Wappen(W)$ $\omega_2 = Zahl(Z)$
Ergebnismenge: $\Omega = \{W, Z\}$
Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 2$
Ereignis: $A = \{W\}$
Ereignis: $B = \{Z\}$
Werfen eines Würfels
Ergebnis: $\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 2$ $\omega_3 = 3$
$\omega_4 = 4$ $\omega_5 = 5$ $\omega_5 = 5$
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 6$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Anzahl der Elemente von $|A| = 4$
Gegenereignis: $\overline{B} = \{2, 4\}$
Anzahl der Elemente von$|\overline{B}| = 2$

Schnittmenge $\cap$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$
Alle Ergebnisse die in A und zugleich in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$

Vereinigungsmenge $\cup$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
Alle Ergebnisse die in A oder B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Differenz $\setminus$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$
Alle Ergebnisse die in A, aber nicht in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} == \{1\}$

Gegenereignis $\overline{A}$

$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Alle Ergebnisse die in Ω, aber nicht in A enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Gegenerreignis: $\overline{A} = \{2, 4\}$

Vereinbare - unvereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\} \Leftrightarrow$ unvereinbare Ereignisse
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{a, b...\} \Leftrightarrow$ vereinbare Ereignisse

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{3, 5, 6\}$
Ereignis: $B = \{3, 4, 5\}$
Ereignis: $C = \{1, 2\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$ vereinbare Ereignisse
$\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \{\}$ unvereinbare Ereignisse

Rechengesetze

• Kommutativgesetz
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
• Assoziativgesetz
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
• Distributivgesetz
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
• De Morgan
$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$
$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$
$\overline{\overline{A}} = A$
• Neutrales Element
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
•Inverses Element
$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A} =$Grundmenge

5.3.2 Relative Häufigkeit

Definition

$h_n(A) = \frac{k}{n}$
n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs
A - Ereignis
k - Absolute Häufigkeit von A
$h(A)$ - Relative Häufigkeit von A

Eigenschaften

• $0 \leq h(A) \leq 1$
• $h(\emptyset) = 0$
• $h(\Omega) = 1$
• $h(A \cup B) = h(A) + h(B) - h(A \cap B)$
• $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
• $h(A) = 1 - h(\overline{A})$

Interaktive Inhalte: $h_n(A) = \frac{k}{n}$ -

5.3.3 Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$P(A) = \frac{k}{n}$

Voraussetzung: Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich

n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs

A - Ereignis

k - Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse für A

$P(A)$- Wahrscheinlichkeit von A

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich:

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

Anzahl aller möglichen Versuchsergebnisse: $n = |\Omega| = 6$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$

Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse: $k = |A| = 4$

Wahrscheinlichkeit von A

$P(A) = \frac{4}{6}$

Eigenschaften

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$

Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3, 5\}$

$P(A) = \frac{3}{6}$

$P(B) = \frac{4}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

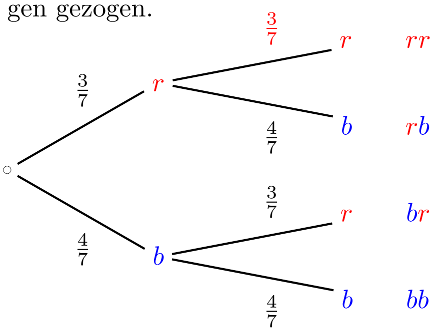
$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$

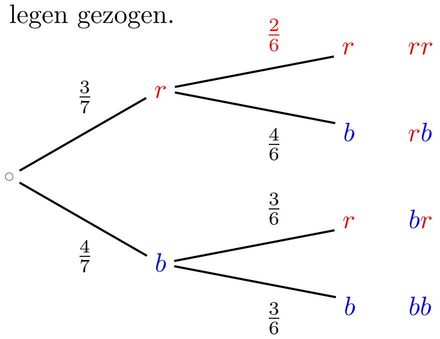
Interaktive Inhalte: $P(A) = \frac{k}{n}$ -

5.3.4 Mehrstufige Zufallsexperimente

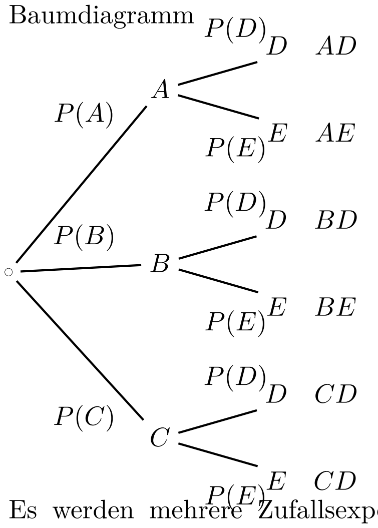
In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.



In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



Baumdiagramm



Es werden mehrere Zufallsexperimente nacheinander ausgeführt. Jedes mögliche Elementarereignis wird zu einem Knoten (A,B,C..) im Baumdiagramm.

Zufallsexperiment 1: $\Omega = \{A, B, C\}$

Zufallsexperiment 2: $\Omega = \{D, E\}$

Die Knoten werden durch Pfade verbunden und die Wahrscheinlichkeiten angetragen. (P(A),P(B)...)

Die Wahrscheinlichkeiten an einem Knoten müssen sich zu 1 addieren.

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (AD,AE..)ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

$P(AD) = P(A) \cdot P(D)$ $\quad P(AE) = P(A) \cdot P(E)$

$P(BD) = P(B) \cdot P(D)$ $\quad P(BE) = P(B) \cdot P(E)$

$P(CD) = P(C) \cdot P(D)$ $\quad P(CE) = P(C) \cdot P(E)$

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Ergebnisse .

$P(AD, CD) = P(AD) + P(CD)$

Ziehen mit Zurücklegen

$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$

1. Pfadregel:

$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$

$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$

$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

Wahrscheinlichkeit für nur gleichfarbige Kugeln

E = {rr;bb}

2. Pfadregel:

$P(E) = P(rr) + P(bb) = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}$

Ziehen ohne Zurücklegen

$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$

1. Pfadregel:

$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$

$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$

$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

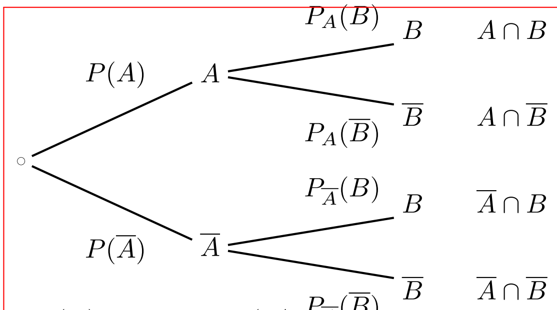
Wahrscheinlichkeit für genau 1 rote Kugel

E = {rb;br}

2. Pfadregel:

$P(E) = P(rb) + P(br) = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42}$

5.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

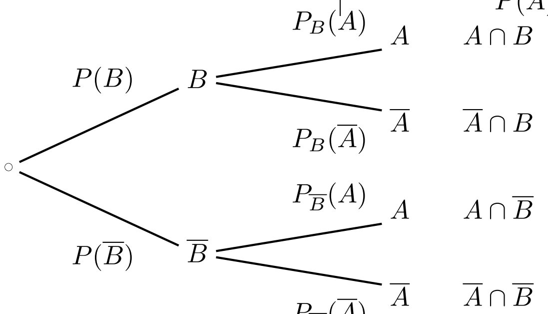


$P_A(B)$ oder auch $P(B|A)$

Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A. Die Wahrscheinlichkeit von B, wenn A schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$	$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P_A(\overline{B})$	$P_A(\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}$
$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B)$	$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}$
$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})$	$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}$



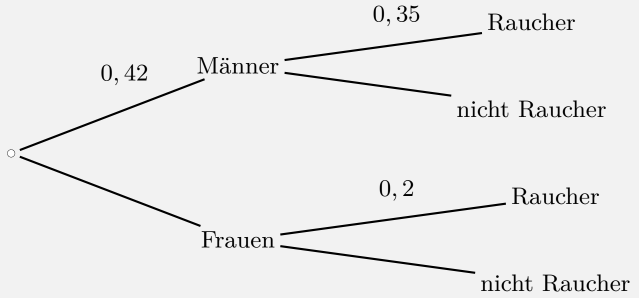
$P_B(A)$ oder auch $P(A|B)$

Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn B schon eingetreten ist.

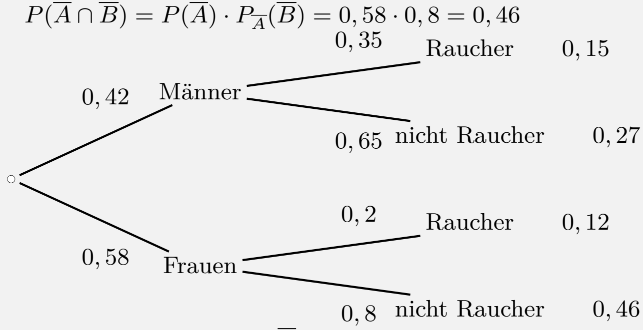
1. Pfadregel

$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$	$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
$P(\overline{A}\cap B)=P(B)\cdot P_B(\overline{A})$	$P_B(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}$
$P(A\cap\overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$	$P_{\overline{B}}(A)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{B})}$
$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(\overline{A})$	$P_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$

$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$
$P(\overline{B})=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$
$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$
$P(\overline{A})=P(\overline{A}\cap B)+P(\overline{A}\cap\overline{B})$



42 Prozent der Deutschen sind Männer.
35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.
Männer (A) $P(A)=0,42$ - Frauen($\overline{A}$) $P(\overline{A})=0,58$
Raucher(B) - nicht Raucher ($\overline{B}$)
Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B)=0,35$
nicht Raucher unter den Männern: $P_A(\overline{B})=0,65$
Raucher unter den Frauen: $P_{\overline{A}}(B)=0,2$
nicht Raucher unter den Frauen: $P_{\overline{A}}(\overline{B})=0,8$
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=0,42\cdot 0,35=0,15$
$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P_A(\overline{B})=0,42\cdot 0,65=0,27$
$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B)=0,58\cdot 0,2=0,12$
$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})=0,58\cdot 0,8=0,46$



$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=0,15+0,12=0,27$
$P(\overline{B})=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,27+0,46=0,73$

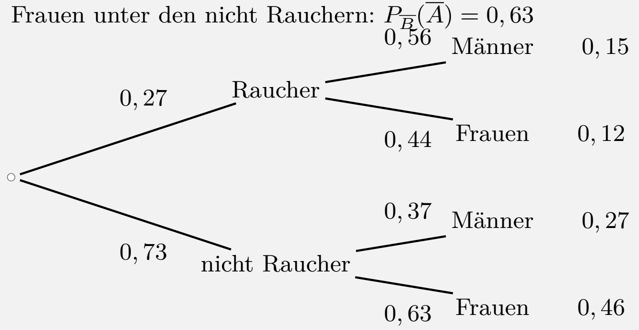
$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,15}{0,27}=0,56$

$P_B(\overline{A})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(B)}=\frac{0,12}{0,27}=0,44$

$P_{\overline{B}}(A)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{B})}=\frac{0,27}{0,23}=0,37$

$P_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,46}{0,73}=0,63$

Männer unter den (Bedingung) Rauchern: $P_B(A)=0,56$
Frauen unter den Rauchern: $P_B(\overline{A})=0,44$
Männer unter den nicht Rauchern: $P_{\overline{B}}(A)=0,37$
Frauen unter den nicht Rauchern: $P_{\overline{B}}(\overline{A})=0,63$



5.3.6 Vierfeldertafel

Relativer Häufigkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.
1. Merkmal hat die Ausprägung A und $\overline{A}$
2. Merkmal hat die Ausprägung B und $\overline{B}$

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$h(A \cap B)$ a	$h(\overline{A} \cap B)$ b	$h(B)$ $a+b$
$\overline{B}$	$h(A \cap \overline{B})$ c	$h(\overline{A} \cap \overline{B})$ d	$h(\overline{B})$ $c+d$
$\sum$	$h(A)$ $a+c$	$h(\overline{A})$ $b+d$	1 $a+b+c+d$

Relative Häufigkeit der Ausprägung
$h(A), h(B), h(\overline{A}), h(\overline{B})$
$h(B) + h(\overline{B}) = 1 \qquad h(A) + h(\overline{A}) = 1$
Relative Häufigkeit von der Schnittmenge
$h(A \cap B), h(\overline{A} \cap B), h(A \cap \overline{B}, h(\overline{A} \cap \overline{B})$
$h(B) = h(A \cap B) + h(\overline{A} \cap B)$
$h(\overline{B}) = h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$
$h(A) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B})$
$h(\overline{A}) = h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$
Relative Häufigkeiten von der Vereinigungsmenge
$h(A \cup B), h(\overline{A} \cup B), h(A \cup \overline{B} h(\overline{A} \cup \overline{B})$
$h(A \cup B) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap B)$
$h(\overline{A} \cup B) = h(A \cap B) + h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$
$h(A \cup \overline{B}) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$
$h(\overline{A} \cap \overline{B}) = h(A \cap \overline{B} + h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(A \cup B) = 1 - h(\overline{A} \cap \overline{B})$
$h(\overline{A} \cup B) = 1 - h(A \cap \overline{B})$
$h(A \cup \overline{B}) = 1 - h(A \cap \overline{B})$
$h(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - h(A \cap B)$
Relative Häufigkeit unter einer Bedingung

$$h_A(B) = \frac{h(A \cap B)}{h(A)}$$
$$h_A(\overline{B}) = \frac{h(A \cap \overline{B})}{h/A)}$$
$$h_{\overline{A}}(B) = \frac{h(\overline{A} \cap B)}{h(\overline{A})}$$
$$h_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{h(\overline{B} \cap \overline{B})}{h(\overline{A})}$$

In einer Schulklasse sind 32 Schüler, darunter 18 Mädchen.
6 Mädchen und 8 Jungen sind krank.
1. Merkmal: Mädchen (A) - Jungen($\overline{A}$)
2.Merkmal: Krank(B) - Gesund ($\overline{B}$)
Mädchen: $A = 18$
Jungen: $\overline{A} = 32 - 18 = 14$
kranke Mädchen: $A \cap B = 6$
kranke Jungen: $\overline{A} \cap B = 8$
Kranke: $B = 6 + 8 = 14$
gesunde Mädchen: $A \cap \overline{B} = 18 - 6 = 12$
gesunde Jungen: $\overline{A} \cap \overline{B} = 14 - 8 = 6$
Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	A Mädchen	$\overline{A}$ Jungen	$\sum$
B Krank	$A \cap B$ 6	$\overline{A} \cap B$ 8	B 14
$\overline{B}$ Gesund	$A \cap \overline{B}$ 12	$\overline{A} \cap \overline{B}$ 6	$\overline{B}$ 18
$\sum$	A 18	$\overline{A}$ 14	$Insgesamt$ 32

Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten

	A Mädchen	$\overline{A}$ Jungen	$\sum$
B Krank	$h(A \cap B)$ $\frac{6}{32}$	$h(\overline{A} \cap B)$ $\frac{8}{32}$	$h(B)$ $\frac{14}{32}$
$\overline{B}$ Gesund	$h(A \cap \overline{B})$ $\frac{12}{32}$	$h(\overline{A} \cap \overline{B})$ $\frac{6}{32}$	$h(\overline{B})$ $\frac{18}{32}$
$\sum$	$h(A)$ $\frac{18}{32}$	$h(\overline{A})$ $\frac{14}{32}$	1 $\frac{32}{32}$

Relative Häufigkeit von
Mädchen $h(A) = \frac{18}{32}$ Jungen $h(\overline{A}) = \frac{14}{32}$
Krank $h(B) = \frac{14}{32}$ Gesund $h(\overline{B}) = \frac{18}{32}$
Anzahl der gesunden Mädchen: 12
$h(A \cap \overline{B}) = \frac{12}{32} = 37,5\%$
37,5% der gesamten Schüler sind gesunde Mädchen.
Wieviel Prozent der Mädchen sind gesund?
$h_A(\overline{B}) = \frac{h(A \cap \overline{B})}{h(A)} = \frac{\frac{12}{32}}{\frac{18}{32}} = \frac{12}{18}$

Wahrscheinlichkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.
1. Merkmal hat die Ausprägung A und $\overline{A}$.
2. Merkmal hat die Ausprägung B und $\overline{B}$.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$P(A\cap B)$ a	$P(\overline{A}\cap B)$ b	$P(B)$ $a+b$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$ c	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$ d	$P(\overline{B})$ $c+d$
$\sum$	$P(A)$ $a+c$	$P(\overline{A})$ $b+d$	1 $a+b+c+d$

Wahrscheinlichkeit der Ausprägung
$P(A), P(B), P(\overline{A}), P(\overline{B})$
$P(B)+P(\overline{B})=1$
$P(A)+P(\overline{A})=1$
Wahrscheinlichkeit von der Schnittmenge
$P(A\cap B), P(\overline{A}\cap B), P(A\cap \overline{B}, P(\overline{A}\cap \overline{B})$.
$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$
$P(\overline{B})=P(A\cap \overline{B})+P(\overline{A}\cap \overline{B})$
$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$
$P(\overline{A})=P(\overline{A}\cap B)+P(\overline{A}\cap \overline{B})$
Berechnungen mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten
$P(A\cap B)=P_A(B)\cdot P(A)$
$P(A\cap \overline{B})=P_A(\overline{B})\cdot P(A)$
$P(\overline{A}\cap B)=P_{\overline{A}}(B)\cdot P(\overline{A})$
$P(\overline{B}\cap \overline{B})=P_{\overline{A}}(\overline{B})\cdot P(\overline{A})$
Wahrscheinlichkeit von der Vereinigungsmenge
$P(A\cup B), P(\overline{A}\cup B), P(A\cup \overline{B}P(\overline{A}\cup \overline{B})$
$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$
$P(\overline{A}\cup B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)+P(\overline{A}\cap \overline{B})$
$P(A\cup \overline{B})=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})+P(\overline{A}\cap \overline{B})$
$P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(A\cap \overline{B}+P(\overline{A}\cap B)+P(\overline{A}\cap \overline{B})$
$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap \overline{B})$
$P(\overline{A}\cup B)=1-P(A\cap \overline{B})$
$P(A\cup \overline{B})=1-P(A\cap \overline{B})$
$P(\overline{A}\cap \overline{B})=1-P(A\cap B)$

42 Prozent der Deutschen sind Männer. 35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.
1.Merkmal: Männer (A) Frauen($\overline{A}$)
2.Merkmal: Raucher(B) - nicht Raucher ($\overline{B}$)
$P(A)=0,42$ $P(\overline{A})=1-0,42=0,58$
Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B)=0,35$
$P(A\cap B)=P_A(B)\cdot P(A)=0,35\cdot 0,42=0,15$
Raucher unter den (Bedingung) Frauen: $P_{\overline{A}}(B)=0,2$
$P(\overline{A}\cap B)=P_{\overline{A}}(B)\cdot P(\overline{A})=0,2\cdot 0,58=0,12)$
$P(\overline{A}\cap \overline{B})=0,42-0,15=0,27$
$P(\overline{B})=0,58-0,12=0,46$
$P(B)=0,15+0,12=0,27$
$P(\overline{B})=1-0,27=0,73$

	A Männer	$\overline{A}$ Frauen	$\sum$
B Raucher	$P(A\cap B)$ $0,15$	$P(\overline{A}\cap B)$ $0,12$	$P(B)$ $0,27$
$\overline{B}$ nicht Raucher	$P(A\cap \overline{B})$ $0,27$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$ $0,46$	$P(\overline{B})$ $0,73$
$\sum$	$P(A)$ $0,42$	$P(\overline{A})$ $0,58$	1

Stochastische Unabhängigkeit

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Leftrightarrow$ A,B unabhängig
$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)\Leftrightarrow$ A,B abhängig

$P(A\cap B)=0,15$
$P(A)=0,42$
$P(B)=0,27$
$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$
$0,15\neq 0,42\cdot 0,27\Leftrightarrow$ A,B abhängig

5.3.7 Binomialverteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Zwei Ausgänge des Zufallsexperiments: rote oder blaue Kugeln
Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel: $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel: $q = 1 - p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
Anzahl der Versuche: n=3
Ziehen mit Zurücklegen: Wahrscheinlickeiten ändern sich nicht

Definition

$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen (Bernoulli-Experiment)
- p - Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
- Stichprobe mit Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich nicht
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs (Bernoullikette der Länge n)
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?
Genau 2 rote Kugeln: k=2

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
$P(X = 2) = B(10, \frac{2}{5}, 2)$
$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (\frac{2}{5})^2 \cdot (1 - \frac{2}{5})^{10-2}$
$P(X = 2) = 0,121$

Verteilungsfunktion

$$F(k) = P(0 \leq X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i)$$

Binomialverteilung $n = 10 \quad p = \frac{2}{5}$

k	$B(10, \frac{2}{5}, k)$	$F(k)$
0	0,006047	0,006047
1	0,040311	0,046357
2	0,120932	0,167290
3	0,214991	0,382281
4	0,250823	0,633103
5	0,200658	0,833761
6	0,111477	0,945238
7	0,042467	0,987705
8	0,010617	0,998322
9	0,001573	0,999895
10	0,000105	1,000000

Bereiche der Binomialverteilung

höchstens k-mal
$$P(x \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) = F(k)$$
weniger als k-mal
$$P(x < k) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n;p;i) = F(k-1)$$
mindestens k-mal
$$P(x \geq k) = \sum_{i=k}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(k-1)$$
mehr als k-mal
$$P(x > k) = \sum_{i=k+1}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(k)$$
mindestens 1-mal
$$P(x \geq 1) = \sum_{i=1}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(0) =$$
$$1 - B(n;p;0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 1 - (1-p)^n$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden ..
genau 2 rote Kugeln
$P(x = 2) = 0,120932$
höchstens 2 rote Kugeln
$P(x \leq 2) = F(2) = \sum_{i=0}^{2} B(10; \frac{2}{5}; i) =$
$B(10, \frac{2}{5}, 0) + B(10, \frac{2}{5}, 1) + B(10, \frac{2}{5}, 2) = 0,167290$
weniger als 2 rote Kugeln
$P(x < 2) = F(1) = \sum_{i=0}^{1} B(10; \frac{2}{5}; i) =$
$B(10, \frac{2}{5}, 0) + B(10, \frac{2}{5}, 1) = 0,046357$
mehr als 2 rote Kugeln
$P(x > 2) == 1 - F(2) = 0,832710$
mindestens 2 rote Kugeln
$P(x \geq 2) = 1 - F(1) = 0,953643$
gezogen

3-mindestens-Aufgabe

P_{min} ist die Mindestwahrscheinlichkeit für mindesten einen Treffer ($x \geq 1$) und der Trefferwahrscheinlichkeit p bei mindestens n Versuchen.
$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$

Gesucht: n - Mindestanzahl der Versuche
$$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$$
$$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$$
$$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$$
$$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \qquad / - P_{min} / + (1-p)^n$$
$$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \qquad /ln$$
$$\ln(1 - P_{min}) \geq \ln((1-p)^n)$$
$$\ln(1 - P_{min}) \geq n \ln((1-p) \qquad / : ln(1-p)$$
$$\frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1-p)} \leq n$$
$$n \geq \frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1-p)}$$

Gesucht: p - Wahrscheinlichkeit eines Treffers
$$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$$
$$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$$
$$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$$
$$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \qquad / - P_{min} / + (1-p)^n$$
$$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \qquad /^{\frac{1}{n}}$$
$$(1 - P_{min})^{\frac{1}{n}} \geq 1 - p \qquad / + p / - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$$
$$p \geq 1 - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen beträgt 20%. Wieviele Lose muss man mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einmal zu gewinnen?
$x \geq 1 \qquad p = 0,2 \qquad P_{min} \geq 0,5$
$P_{0,2}^n(x \geq 1) \geq 0,5$
$1 - P_{0,2}^n(0) \geq 0,5$
$$1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot (1 - 0,2)^n \geq 0,5$$
$1 - 0,8^n \geq 0,5 \qquad / - 0,5 / + 0,8^n$
$1 - 0,5 \geq 0,8^n \qquad /ln$
$\ln(0,5) \geq \ln(0,8^n)$
$\ln(0,5) \geq n \ln(0,8) \qquad / : ln(0,8)$
$$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)} \leq n$$
$$n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)}$$
$n \geq 3,1$

Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens 40%. Wie groß muß die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen sein ?
$x \geq 1 \qquad n = 10 \qquad P_{min} \geq 0,4$
$P_p^{10}(x \geq 1) \geq 0,4$
$1 - P_p^{10}(0) \geq 0,4$
$$1 - \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} \geq 0,4$$
$1 - (1-p)^{10} \geq 0,4 \qquad / - 0,4 / + (1-p)^{10}$
$1 - 0,4 \geq (1-p)^{10} \qquad /^{\frac{1}{10}}$
$(0,6)^{\frac{1}{10}} \geq 1 - p \qquad / + p / - (0,6)^{\frac{1}{10}}$
$p \geq 1 - (0,6)^{\frac{1}{10}}$
$p \geq 0,05$

Wartezeitaufgaben

Erster Treffer im n-ten Versuch
$P(E) = (1-p)^{n-1} \cdot p$

Erster Treffer frühestens im n-ten Versuch
$P(E) = (1-p)^{n-1}$

Erster Treffer spätestens im n-ten Versuch
$P(E) = 1-(1-p)^n$

k-ter Treffer im n-ten Versuch
$P(E) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p$

k-ter Treffer frühestens im n-ten Versuch
$P(E) = P(x \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n-1;p;i)$

k-ter Treffer spätestens im n-ten Versuch
$P(E) = 1 - P(x \leq k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(n;p;i)$

Zufallsexperiment Würfeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 6

- beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = (1-\frac{1}{6})^{9-1} \cdot \frac{1}{6}$

- frühestens beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = (1-\frac{1}{6})^{9-1}$

- spätestens beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = 1-(1-\frac{1}{6})^9$

- beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = \binom{9-1}{3-1} \cdot \frac{1}{6}^{3-1} \cdot (1-p)^{9-3} \cdot \frac{1}{6}$

- frühestens beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = \sum_{i=0}^{3-1} B(9-1;\frac{1}{6};i)$

- spätestens beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = 1 - \sum_{i=0}^{3-1} B(9;\frac{1}{6};i)$

Interaktive Inhalte: $P(X=k)$ - $F(x)$ - $P(k1 \leq X \leq k2)$ - $P(X >, \geq, \leq ....k)$ -

5.3.8 Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Anzahl der Elemente: N=10
Anzahl der Züge: n=3
Anzahl der roten Kugeln: K=4
Ziehen ohne Zurücklegen

Definition

$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen
- Stichprobe ohne Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich
- N - Anzahl aller Elemente
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs
- K - Anzahl von A unter den N - Elementen
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?
Anzahl der gezogenen roten Kugeln: k=2

$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}$

$P(X=2) = \frac{3}{10}$

Interaktive Inhalte: $P(X=k)$ -

5.3.9 Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, x_3...$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	p_4	..

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 ....$

$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$

Varianz:

$Var(x) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + ...$

$Var(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

x	-1	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{1}{5}$

Erwartungswert:

$E(x) = -1 \cdot \frac{2}{25} + 0 \cdot \frac{3}{25} + 1 \cdot \frac{7}{50} + 2 \cdot \frac{6}{25} + 3 \cdot \frac{11}{50} + 4 \cdot \frac{1}{5}$

$E(x) = \mu = 2$

Varianz:

$Var(x) = (-1 - 2)^2 \cdot \frac{2}{25} + (0 - 2)^2 \cdot \frac{3}{25} + (1 - 2)^2 \cdot \frac{7}{50}$
$+ (2 - 2)^2 \cdot \frac{6}{25} + (3 - 2)^2 \cdot \frac{11}{50} + (4 - 2)^2 \cdot \frac{1}{5} = 2\frac{9}{25}$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{2\frac{9}{25}} = 1,54$

Binominalverteilung

Binominalverteilung B(n;p)

X	0	1	2	3	.
$P(X)$	$B(n;p;0)$	$B(n;p;1)$	$B(n;p;2)$	$B(n;p;3)$	.

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = n \cdot p$

Varianz:

$Var(x) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

Binomialverteilung

$n = 50 \qquad p = 0,25$

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = n \cdot p$

$E(x) = \mu = 50 \cdot \frac{1}{4}$

$E(x) = 12\frac{1}{2}$

Varianz:

$Var(x) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

$Var(x) = 50 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4})$

$Var(x) = 9\frac{3}{8}$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{9\frac{3}{8}} = 3,06$

Interaktive Inhalte: hier klicken *Binomial* -

5.4 Testen von Hypothesen

5.4.1 Einseitiger Signifikanztest

Ist ein Würfel gezinkt?
Die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln ist bei einem nicht gezinkten Würfel: $p = \frac{1}{6}$ (Nullhypothese). Bei einem gezinkten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs: $p > \frac{1}{6}$ (Gegenhypothese und Rechtsseitiger Signifikanztest). Der zu testende Würfel wird 100 mal geworfen (Stichprobenlänge). Man hält den Würfel für nicht gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser höchstens 20 ist (Annahmebereich der Nullhypothese). Man hält den Würfel für gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser mindestens 21 ist (Ablehungsbereich der Nullhypothese).
Zwei Fehler sind bei der Entscheidung möglich:

1. Der Würfel ist nicht gezinkt. Mit viel Glück kann man auch mit einem nicht gezinkten Würfel mehr als 20 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für gezinkt, obwohl er es nicht ist.(Fehler 1. Art)

2. Der Würfel ist gezinkt. Mit viel Pech kann man auch mit einem gezinkten Würfel weniger als 21 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für nicht gezinkt, obwohl er es ist. (Fehler 2. Art).

Ziel ist es die Wahrscheinlichkeit für die Fehler zu berechnen (Irrtumswahrscheinlichkeit).

Definitionen

- Testgröße: Binominal verteilte Zufallsgröße X
- Nullhypothese H_0: Vermutete Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße X
- Gegenhypothese H_1: Alternative Wahrscheinlichkeit
- Stichprobenlänge n : Anzahl der durchgeführten Versuche
- Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich für die Nullhypothese
- Fehler 1. Art (α-Fehler): H_0 wird irrtümlich abgelehnt. Entscheidung gegen H_0, aber H_0 ist richtig.
- Fehler 2. Art (β-Fehler): H_0 wird irrtümlich angenommen. Entscheidung für H_0, aber H_0 ist nicht richtig.
- Irrtumswahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 Art. Berechnung durch: $\alpha = P^n_{p_0}$(Ablehnungsbereich von H_0)
- Signifikanzniveau: maximale Irrtumswahrscheinlichkeit

Testgröße: Anzahl der Sechsen beim Würfeln
Stichprobenlänge $n = 100$
Nullhypothese $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$
Gegenhypothese $H_1 : p > \frac{1}{6}$
Annahmebereich: $A = \{0..20\}$
Annahmebereich: $\overline{A} = \{21..100\}$

Rechtsseitiger Signifikanztest

	Annahmebereich	Ablehnungsbereich
	$A = \{0.....k\}$	$\overline{A} = \{k+1.....n\}$
$H_0 : p \leq p_0$	richtig	Fehler 1. Art
$H_1 : p > p_0$	Fehler 2. Art	richtig

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0 ,Annahme-und Ablehnungsbereich

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$\alpha = P^n_{p_0}(\overline{A})$

$\alpha = P^n_{p_0}(X \geq k+1) = \sum_{i=k+1}^{n} B(n; p_0; i)$

$\alpha = 1 - P^n_{p_0}(X \leq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} B(n; p_0; i) = 1 - F(k)$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n,H_0,Signifikanzniveau

Gesucht:Annahme-und Ablehnungsbereich

$P^n_{p_0}(\overline{A}) \leq \alpha$

$P^n_{p_0}(X \geq k+1) \leq \alpha$

$1 - P^n_{p_0}(X \leq k) \leq \alpha$

$P^n_{p_0}(X \leq k) \geq 1 - \alpha$

Aufgabentyp 1

Gegeben:

$n = 100, H_0 : p \leq \frac{1}{6}$

$A\{0..20\}, \overline{A} = \{21..100\}$

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art

$\alpha = P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \geq 21) = \sum_{i=21}^{100} B(100; \frac{1}{6}; i)$

$\alpha = 1 - P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \leq 20) = 1 - \sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) = 1 - F(20)$

Aus Tafelwerk: $\sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) = F(20) = 0,84811$

$1 - 0,84811 = 0,15189$

Irrtumswahrscheinlichkeit $= 15,19\%$

Aufgabentyp 2

Gegeben:

$n = 100; H_0 : p = \frac{1}{6}$

Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$

Gesucht: Entscheidungsregel

$A\{0..k\}; \overline{A}\{k+1..100\}$

$P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \geq k+1) \leq 0,05$

$\sum_{i=k+1}^{100} B(100; \frac{1}{6}; i) \leq 0,05$

$1 - P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \leq k) \leq 0,05$

$P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \leq k) \geq 1 - 0,05$

$P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \leq k) \geq 0,95$

Aus Tafelwerk: $k = 23$

Entscheidungsregel

$A\{0..23\}; \overline{A}\{24..100\}$

Linksseitiger Signifikanztest

	Ablehnungsbereich	Annahmebereich
	$\overline{A} = \{0.....k\}$	$A = \{k+1.....n\}$
$H_0 : p \geq p_0$	Fehler 1. Art	richtig
$H_1 : p < p_0$	richtig	Fehler 2. Art

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0, Annahme-und Ablehnungsbereich

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$\alpha = P^n_{p_0}(\overline{A})$

$\alpha = P^n_{p_0}(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p_0; i) = F(k)$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n, H_0,Signifikanzniveau α

Gesucht:Annahme-und Ablehnungsbereich

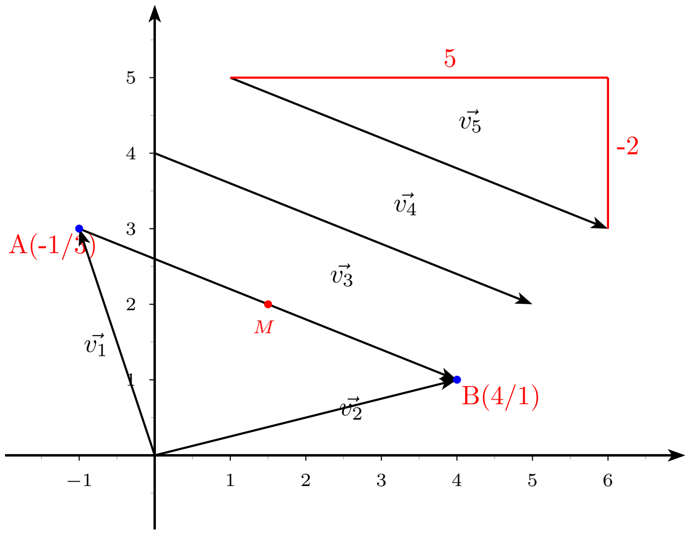
$P^n_{p_0}(\overline{A}) \leq \alpha$

$P^n_{p_0}(X \leq k) \leq \alpha$

6 Analytische Geometrie

6.1 Vektorrechung in der Ebene

6.1.1 Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

• Vektor $\vec{v}$ - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

• Ortsvektor $\vec{v}$ - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$

• Gegenvektor $\vec{v}$ - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v_3} = \vec{v_4} = \vec{v_5}$
$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(x_a/y_a) \quad B(x_b/y_b)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$

Punkte: $A(-1/3) \quad B(4/1)$
Vektor zwischen zwei Punkten
$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2)}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{29}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = 5,39$$

Steigung der Graden AB

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Steigung der Graden AB

$m = \frac{y}{x}$

Winkel des Vektors mit der x-Achse

$\tan\alpha = m$

Steigng der Geraden AB

$m = \frac{-2}{5}$

Mittelpunkt der Strecke AB

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}\right)$

$M\left(\frac{x_a+x_b}{2} / \frac{y_a+y_b}{2}\right)$

Mittelpunkt der Strecke AB

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

$M(1\frac{1}{2}/2)$

Vektorkette

Punkt: $A(x_a/y_a)$

Vektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{v} \qquad \vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$

$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A(-1/3) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

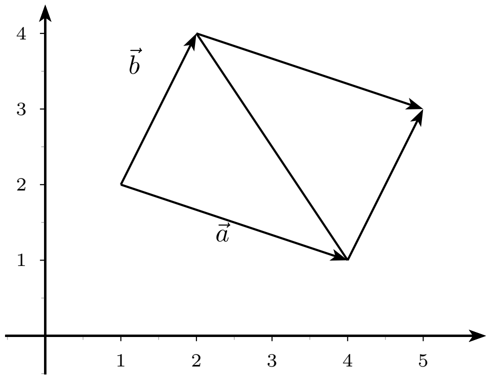
$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B(4/1)$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.1.2 Skalarprodukt - Fläche - Winkel



$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Steigung der Vektoren

$m_a = \frac{y_a}{x_a} \qquad m_a = \frac{y_b}{x_b}$

$m_a = m_b \Rightarrow$ Vektoren sind parallel

Steigung

$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{2}{1} = 2$

Skalarprodukt

$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$

Senkrechte Vektoren:

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \circ \vec{b} == \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + -1 \cdot 2 = 1$

Fläche aus 2 Vektoren

Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b)$

Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - -1 \cdot 1 = 7$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = 3\frac{1}{2}$

Winkel zwischen Vektoren

$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\cos \alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$

Schnittwinkel:

$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 1 + -1 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}$

$\cos \alpha = \left| \frac{1}{3,16 \cdot 2,24} \right|$

$\cos \alpha = |0,141|$

$\alpha = 81,9$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.1.3 Abbildungen

Lineare Abbildung in Matrixform - Koordinatenform

Matrixform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Koordinatenform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + e \\ c \cdot x + d \cdot y + f \end{pmatrix}$$

$x' = a \cdot x + b \cdot y + e \qquad y' = c \cdot x + d \cdot y + f$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 31 \end{bmatrix}$

Verschiebung

Punkt: $P(x_p/y_p)$

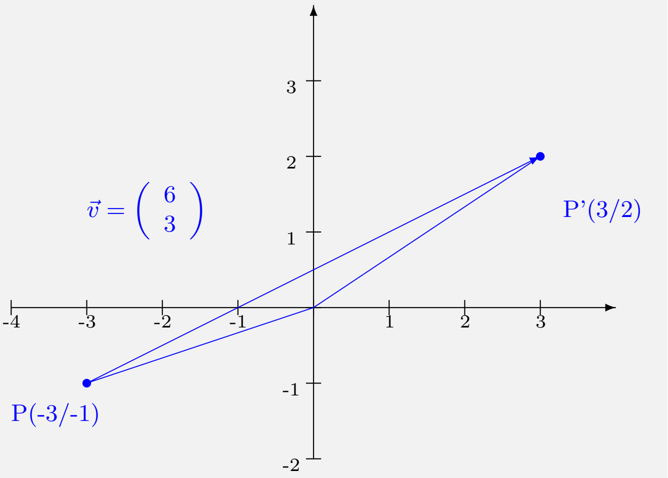
Vektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$P(-3/-1)$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$

$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P'(3/2)$

Spiegelung an den Koordinatenachsen

Spiegelung an der x–Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \qquad y' = -y$$

Spiegelung an der y–Achse

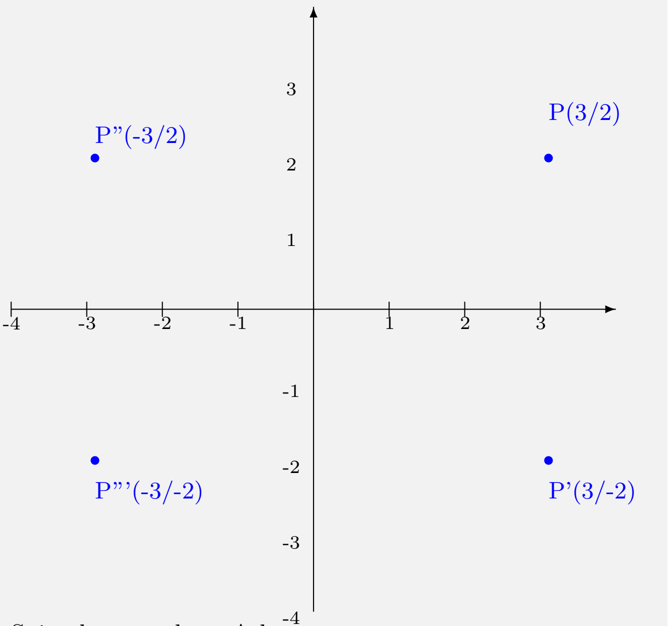
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \qquad y' = y$$

Spiegelung am Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \qquad y' = -y$$



Spiegelung an der x-Achse
$P(3/2) \longmapsto P'(3/-2)$
Spiegelung an der y-Achse
$P(3/2) \longmapsto P''(-3/2)$
Spiegelung am Ursprung
$P(3/2) \longmapsto P'''(-3/-2)$

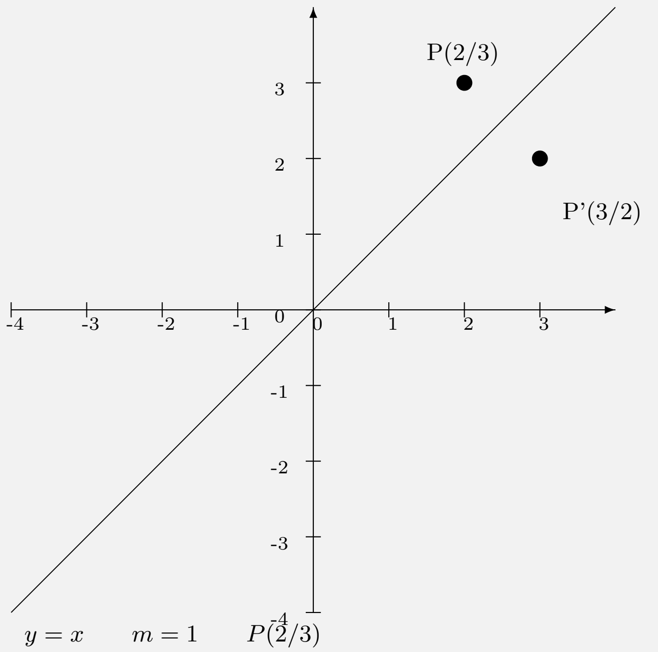
Spiegelung an der Urspungsgerade

$$y = m \cdot x \qquad \tan\alpha = m$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \qquad y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$$



$y = x \qquad m = 1 \qquad P(2/3)$

$tan\alpha = 1 \qquad \alpha = 45°$

$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha$

$x' = 2 \cdot \cos 2 \cdot 45° + 3 \cdot \sin 2 \cdot 45°$

$x' = 3$

$y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$

$y' = 2 \cdot \sin 2 \cdot 45° - 3 \cdot \cos 2 \cdot 45°$

$y' = 2$

$P(2/3) \longmapsto P'(3/2)$

Zentrische Streckung

Streckzentrum: $Z(0/0)$
Streckungsfaktor :k
Urpunkt: $P(x_P/y_P)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

Streckzentrum: $Z(x_z/y_z)$
Streckungsfaktor:k
Urpunkt: $P(x_P/y_P)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$
Vektorform

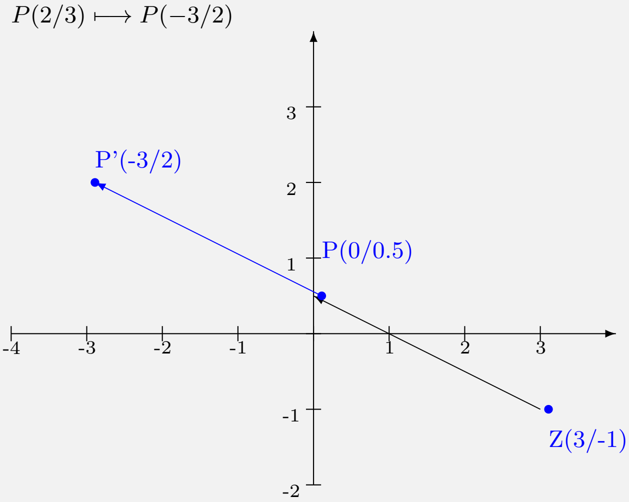
$$\vec{ZP'} = k \cdot \vec{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} - x_Z \\ y_{P'} - y_Z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

$P(2/3) \longmapsto P(-3/2)$



Streckzentrum: $Z(3/-1)$
Streckungsfaktor:2
Urpunkt: $P(0/0,5)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0,5-(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P'(-3/2)$

Drehung um den Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \qquad y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$

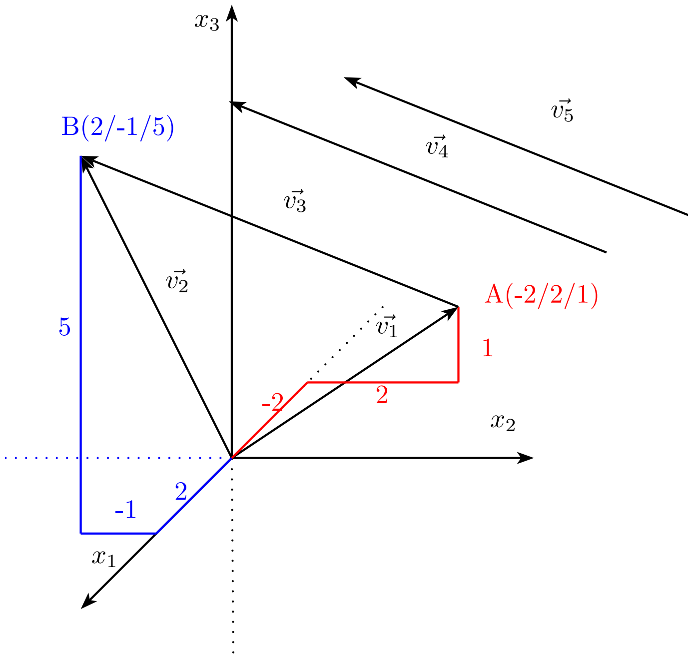
Orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

$x' = x \qquad y' = k \cdot y$

6.2 Vektor

6.2.1 Vektor - Abstand - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

• Vektor $\vec{v}$ - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

• Ortsvektor $\vec{v}$ - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

• Gegenvektor $\vec{v}$ - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v_3} = \vec{v_4}$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(a_1/a_2/a_3) \quad B(b_1/b_2/b_3)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(-2/2/1) \quad B(2/-1/5)$

Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 4^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{41}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = 6,4$$

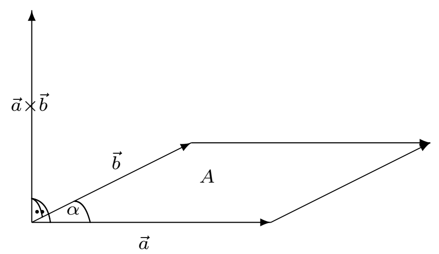
Mittelpunkt der Strecke AB

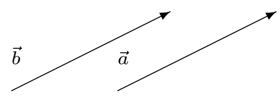
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right)$$
$$M\left(\tfrac{a_1+b_1}{2} / \tfrac{a_2+b_2}{2} / \tfrac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Mittelpunkt der Strecke AB
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$M(0/\tfrac{1}{2}/3)$$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.2.2 Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit





$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Länge der Vektoren:
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$
$$|\vec{a}| = 3$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = 3$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$
$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$
Senkrechte Vektoren:
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Skalarprodukt:
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot -2 = -7$$

Vektorprodukt - Fläche des Parallelogramms

$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$A = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

$A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}$

$|\vec{c}| = 5,657$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\alpha = \left| \frac{-7}{3 \cdot 3} \right|$$

$$\cos\alpha = \left| -\frac{7}{9} \right|$$

$\alpha = 38,942$

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{array}{lllll} a_1 & = & b_1 k & / : b_1 & \Rightarrow k_1 \\ a_2 & = & b_2 k & / : b_2 & \Rightarrow k_2 \\ a_3 & = & b_3 k & / : b_3 & \Rightarrow k_3 \end{array}$$

$k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow$

Vekoren sind linear abhängig - parallel

nicht alle k gleich $\Rightarrow$

Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

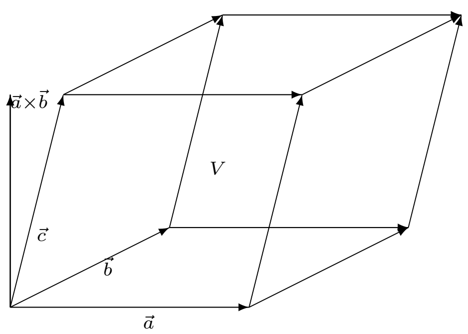
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

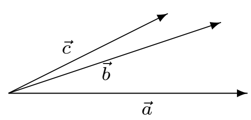
$$\begin{array}{lllll} 2 & = & -2k & / : -2 & \Rightarrow k = -1 \\ 1 & = & 1k & / : 1 & \Rightarrow k = 1 \\ 2 & = & -2k & / : -2 & \Rightarrow k = -1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.2.3 Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität





$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Spatprodukt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt von $\vec{a}, \vec{b}$ skalar multipliziert mit $\vec{c}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7) \\ 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-7) - (-3) \cdot (-4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ -33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 44$

Spatprodukt = Wert der Determinante

Spatprodukt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b1 \cdot c2 \cdot a_3 + c1 \cdot a_2 \cdot b_3$

$-c1 \cdot b2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a_2 \cdot c_3$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \\ 4 & 2 \end{matrix}$

$D = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 2$

$-7 \cdot (-7) \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \cdot 2$

$D = 44$

Spatprodukt - Volumen

•Volumen von Prisma oder Spat

$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

•Volumen einer Pyramide mit den Grundflächen:

Quadrat,Rechteck,Parallelogramm

$V = \frac{1}{3}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

• Volumen ein dreiseitigen Pyramide

$V = \frac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$V = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \\ 4 & 2 \end{matrix}$

$V = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 2$

$-7 \cdot (-7) \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \cdot 2$

$V = 44$

Eigenschaften von 3 Vektoren

• $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear abhängig
- liegen in einer Ebene (komplanar)
- sind keine Basisvektoren

• $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 44$

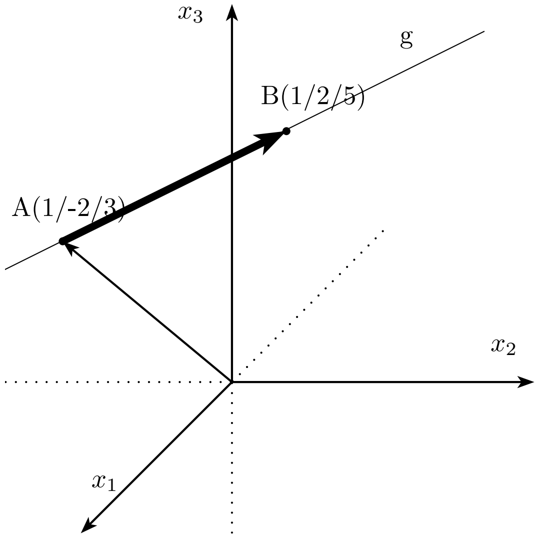
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.3 Gerade

6.3.1 Gerade aus 2 Punkten



Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$
Richtungsvektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkt A oder B als Aufpunkt wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(1/-3/3)$ $B(1/2/5)$
Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2+3 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Besondere Geraden

x_1 − Achse $\quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

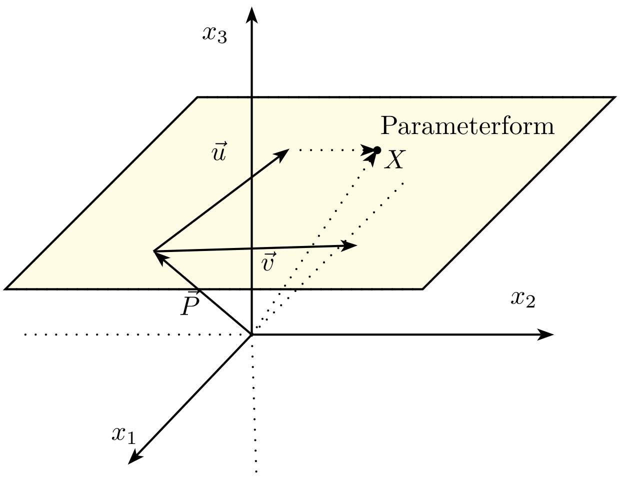
x_2 − Achse $\quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

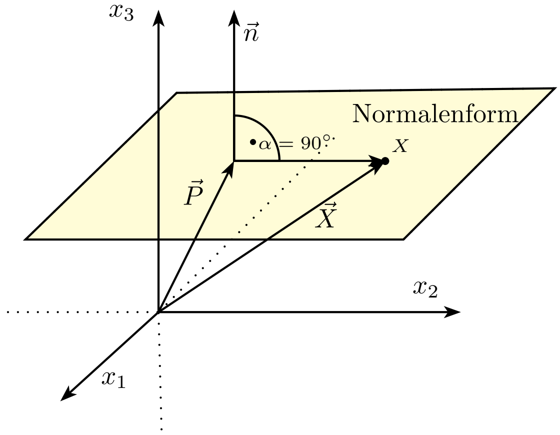
x_3 − Achse $\quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.4 Ebene

6.4.1 Parameterform - Normalenform





Parameterform

$\vec{x}$ - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene
$\vec{P}$ - Aufpunkt (Stützvektor,Ortsvektor)
$\vec{u}, \vec{v}$ - Richtungsvektoren
λ, σ-Parameter
$\vec{x} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} + \sigma \cdot \vec{v}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Normalenform - Koordinatenform

$\vec{x}$ - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene
$\vec{n}$ - Normalenvektor
$\vec{P}$ - Aufpunkt (Stützvektor,Ortsvektor)
$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \cdot \vec{p}) = 0$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:
$n_1(x_1 - p_1) + n_2(x_2 - p_2) + n_3(x_3 - p_3) = 0$
$n_1 x1 - n1p1 + n_2 x_2 - n_2 p_2 + n_3 x_3 - n_3 p_3 = 0$
$c = -(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3)$
$n_1 x1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + c = 0$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
Punkt in der Ebene $P(2/-1/1)$
Nomalenform:
$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \cdot \vec{p}) = 0$

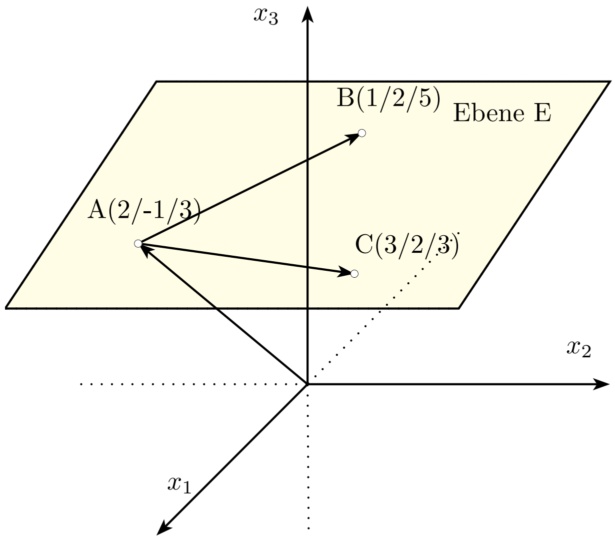
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:
$1(x_1 - 2) + 2(x_2 + 1) + 3(x_3 - 1) = 0$
$x1 + 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

Besondere Ebenen

Ebene	Parameterform	Koordinatenform
$x1-x2$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$x_3=0$
$x1-x3$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$x_2=0$
$x2-x3$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$x_1=0$

6.4.2 Ebenengleichung aufstellen



Ebene aus 3 Punkten

Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)\quad B(b_1/b_2/b_3)\quad C(c_1/c_2/c_3)$

Die 3 Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Ebene aus drei Punkten:

Richtungsvektor: $\vec{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$

Richtungsvektor: $\vec{AC}=\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$

Ebenengleichung aus Aufpunkt und den Richtungsvektoren.

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$$

Punkte: $A(2/-1/3)\quad B(1/2/5)\quad C(3/2/3)$

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}1-2\\2+1\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC}=\begin{pmatrix}3-2\\2+1\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

Ebene aus Gerade und Punkt

Der Punkte darf nicht auf der Geraden liegen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

Richtungsvektor zwischen Aufpunkt A und dem Punkt C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punkt: $C(2/0/1)$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei parallelen Geraden

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Bei parallelen Geraden sind Richtungsvektoren linear abhängig. Für die Ebenengleichung muß ein 2. Richtungsvektor erstellt werden. 2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll} 2 &=& +4k & /:4 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \\ 0 &=& +0k & /:0 \quad \Rightarrow k = beliebig \\ -1 &=& -2k & /:-2 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt: $A(3/4/5)$

$$\begin{array}{rclll} 3 &=& 1 & +2\lambda & /-1 \\ 4 &=& 3 & +0\lambda & /-3 \\ 5 &=& 0 & -1\lambda & /-0 \\ 2 &=& & 2\lambda & /:2 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1 &=& & 0\lambda & \quad \Rightarrow \text{falsch} \\ 5 &=& & -1\lambda & /:-1 \quad \Rightarrow \lambda = -5 \end{array}$$

$\Rightarrow$

Geraden sind echt parallel

2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Bei sich schneidenden Geraden sind Richtungsvektoren linear unabhängig.

Ebenengleichung in Parameterform

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(5, -9, 0)$

Ebenengleichung in Parameterform

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Interaktive Inhalte: 3 Punkte - Punkt und Gerade - Parallele Geraden -

6.4.3 Parameterform - Koordinatenform

1. Methode: Determinante

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 - a_1 & b_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 \end{matrix} = 0$

$(x_1 - a_1) \cdot b_2 \cdot c_3 + b1 \cdot c2 \cdot (x_3 - a_3) +$

$c1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot b_3 - c1 \cdot b2 \cdot (x_3 - a_3) -$

$(x_1 - a_1) \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot c_3 = 0$

Koordinatenform:

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & -2 & 2 \\ x_2 + 3 & 4 & -5 \\ x_3 - 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 - 1 & -2 \\ x_2 + 3 & 4 \\ x_3 - 2 & 3 \end{matrix} = 0$

$(x_1 - 1) \cdot 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-5) \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 + 3) \cdot 3 -$
$2 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot (-5) \cdot 3 - (-2) \cdot (x_2 + 3) \cdot 0 = 0$

$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

Koordinatenform:

$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

2. Methode: Vektorprodukt

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene mit dem Vektorprodukt

$\vec{n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - c_3 \cdot b_1 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene und Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 + k = 0$

k berechnen

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt:

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + k = 0$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + k = 0$

$k = -4$

Koordinatenform

$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$

Interaktive Inhalte: Determinante - Vektorprodukt -

6.4.4 Koordinatenform - Parameterform

1. Methode

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

•x_1 durch einen Parameter ersetzen

$x_1 = \lambda$

•x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_2 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_3 auflösen

$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}x_1 - \frac{n_2}{n_3}x_2$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}\lambda - \frac{n_2}{n_3}\sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k}{n_3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

•x_1 durch einen Parameter ersetzen

$x_1 = \lambda$

•x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_2 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_3 auflösen

$x_3 = -\frac{2}{2} - \frac{4}{2}x_1 - \frac{8}{2}x_2$

$x_3 = 1 - 2x_1 - 4x_2$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

$x_3 = 1 - 2\lambda - 4\sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$4x_1 - 2 = 0$

•x_2 durch einen Parameter ersetzen

$x_2 = \lambda$

•x_3 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_3 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_1 auflösen

$x_1 = \frac{1}{2}$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = \frac{1}{2} + 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_3 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Methode

• Drei beliebige Punkte, die in der Ebene liegen ermitteln.

• Die Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein.

• Ebenengleichung aus 3 Punkten aufstellen.

$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

•$x_1 = 0$ $\quad x_2 = 0$ frei wählen und in die Ebenengleichung einsetzen.$\Rightarrow$ $x_3 = 1$ und $P_1(0/0/1)$

• 2 weitere Punkte ermitteln: $P_2(1/0/-1)$ $\quad P_3(0/1/-3)$

• Die Richtungvektoren sind linear unabhängig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

6.4.5 Koordinatenform - Hessesche Normalenform

Koordinatenform:

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$

Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Länge des Normalenvektors:

$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$

Hessesche Normalenform:

$k1 < 0$

HNF: $\dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$

$k1 > 0$

HNF: $\dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{-\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$

Koordinatenform:

$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Länge des Normalenvektors:

$|\vec{n}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + 6^2 + 2^2}$

$|\vec{n}| = 16,3$

Hessesche Normalenform:

HNF: $\dfrac{15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1}{16,3} = 0$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.5 Kugel

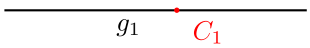
6.5.1 Kugelgleichung

$M(m_1/m_2/m_3)$ - Mittelpunkt der Kugel
r - Radius der Kugel
$X(x_1/x_2/x_3)$ - beliebiger Punkt auf der Kugel
Kugelgleichung:
$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

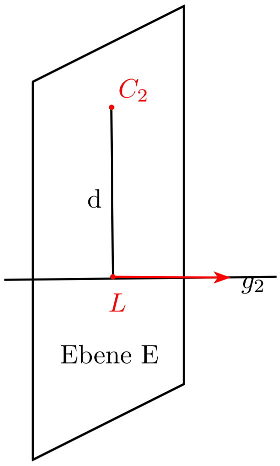
$M(3/2/-4)$ – Mittelpunkt der Kugel
$r = 6$ – Radius der Kugel
$X(x_1/x_2/x_3)$ – beliebiger Punkt auf der Kugel
Kugelgleichung:
$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_2 + 4)^2 = 6^2$

6.6 Lagebeziehung

6.6.1 Punkt - Gerade



Punkt C_1 liegt auf der Geraden g_1



Abstand d des Punktes C_2 von der Geraden g_2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

$$\begin{array}{lllll} c_1 = & a_1 & + & b_1\lambda_1 & \Rightarrow \lambda_1 \\ c_1 = & a_2 & + & b_2\lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 \\ c_1 = & a_3 & + & b_3\lambda_3 & \Rightarrow \lambda_3 \end{array}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow$

Punkt liegt auf der Geraden

nicht alle λ gleich $\Rightarrow$

Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Die Koordinatenform der Ebenengleichung aufstellen, die senkrecht zur Geraden ist und den Punkt C enthält. Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene. Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

Abstand des Punktes, ist die Länge des Vektors $\vec{LC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Punkt: } C(7, 9, -6)$$

$$\begin{array}{rclll} 7 & = & 1 & -2\lambda & /-1 \\ 9 & = & 3 & -2\lambda & /-3 \\ -6 & = & -3 & +2\lambda & /+3 \\ 6 & = & -2\lambda & /:-2 & \Rightarrow \lambda = -3 \\ 6 & = & -2\lambda & /:-2 & \Rightarrow \lambda = -3 \\ -3 & = & 2\lambda & /:2 & \Rightarrow \lambda = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktens berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + k = 0$

C ist Punkt in der Ebene

$-2 \cdot 7 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + k = 0$

$k = 44$

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 44 = 0$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$\begin{array}{rrr} x_1 = & 1 & -2\lambda \\ x_2 = & 3 & -2\lambda \\ x_3 = & -3 & +2\lambda \end{array}$$

$-2(1 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 44 = 0$

$12\lambda + 30 = 0$

$\lambda = \frac{-30}{12}$

$\lambda = -2\frac{1}{2}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt: $L(6, 8, -8)$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 30 - 9 \\ -2\frac{1}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$\left|\vec{CL}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.6.2 Gerade - Gerade

Geraden schneiden sich | Geraden sind parallel | Geraden sind windschief | Geraden sind identisch

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren linear abhängig (parallel) ?

- Ja: Aufpunkt von g1 auf g2?
  - Ja: identisch
  - Nein: echt paralllel
- Nein: Geraden gleichsetzen
  - keine Lösung: windschief
  - Lösung: schneiden sich

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrll} 4 & = & -4k & /:-4 & \Rightarrow k = -1 \\ -7 & = & -4k & /:-4 & \Rightarrow k = 1\frac{3}{4} \\ -8 & = & -3k & /:-3 & \Rightarrow k = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcrrll} 1 & +4\lambda & = & 9 & -4\sigma & /-1 & /+4\sigma \\ -2 & -7\lambda & = & -5 & -4\sigma & /+2 & /+4\sigma \\ 8 & -8\lambda & = & 3 & -3\sigma & /-8 & /+3\sigma \end{array}$$

$I \quad 4\lambda + 4\sigma = 8$
$II \quad -7\lambda + 4\sigma = -3$
$III \quad -8\lambda - 3\sigma = -5$

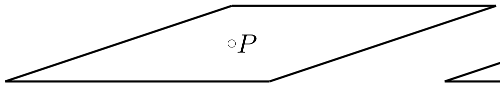
Aus den Gleichungen I und II λ und σ berechnen
$\sigma = 1$
$\lambda = 1$
λ und σ in die verbleibende Gleichung einsetzen
$III \quad 8 + 1 \cdot (-8) = 3 + 1 \cdot (-3)$
$0 = 0$
λ oder σ in die Geradengleichung einsetzen

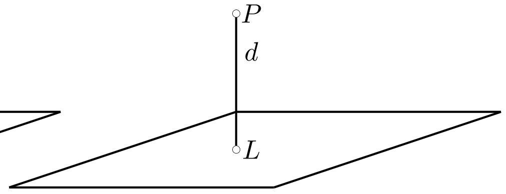
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $S(5, -9, 0)$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.6.3 Punkt - Ebene (Koordinatenform)





Punkt liegt in der Ebene

Punkt liegt nicht in der Ebene

Punkt: $A(a_1/a_2/a_3)$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

$n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c_1 = 0$

- Liegt der Punkt in der Ebene?

Punkt in die Ebene einsetzen.

Gleichung nach Umformung: $0 = 0 \Rightarrow$ Punkt liegt in der Ebene

- Abstand Punkt - Ebene

Punkt in die HNF einsetzen.

Punkt: $A(1/2/0)$
Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 7 = 0$
$0 = 0$
Punkt liegt in der Ebene

Punkt: $A(2/-4/3)$
Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7 = 0$
$20 = 0$
Punkt liegt nicht in der Ebene
Abstand des Punktes von der Ebene
Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF
$-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

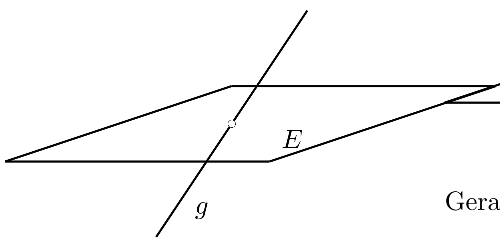
Länge des Normalenvektors:
$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$
$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}$
$|\vec{n}| = 3,32$
HNF:
$\frac{-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7}{-3,32} = 0$
Punkt in HNF:

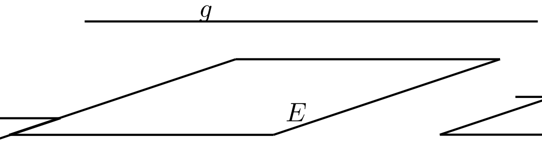
$$d = \left|\frac{-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7}{-3,32}\right|$$

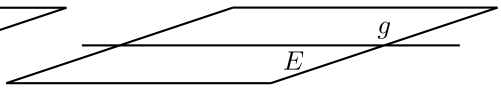
$d = |-6,03|$
$d = 6,03$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.6.4 Gerade - Ebene (Koordinatenform)







Gerade ist parallel zur Ebene

Gerade liegt in der Ebene

Gerade schneidet Ebene

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

Gerade1 in Punktdarstellung

$x_1 = a_1 + b_1\lambda$

$x_2 = a_2 + b_2\lambda$

$x_3 = a_3 + b_3\lambda$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$n_1(a_1 + b_1\lambda) + n_2(a_2 + b_2\lambda) + n_3(a_3 + b_3\lambda) + c_1 = 0$

Die Gleichung nach der Variablen auflösen.

• Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. Variable in die Gerade einsetzen

• Geraden und Ebene sind parallel

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: $Konstante = 0$

• Gerade liegt in der Ebene

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung:$0 = 0$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ebene: $1x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 10 = 0$

$$\begin{array}{lll} x_1 = & 3 & +4\lambda \\ x_2 = & 5 & +5\lambda \\ x_3 = & 7 & +5\lambda \end{array}$$

$1(3 + 4\lambda) - 2(5 + 5\lambda) + 5(7 + 5\lambda) + 10 = 0$

$19\lambda + 38 = 0$

$\lambda = \frac{-38}{19}$

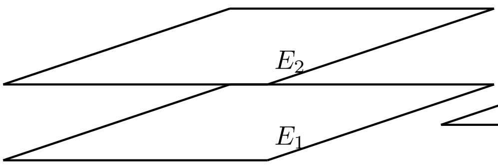
$\lambda = -2$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

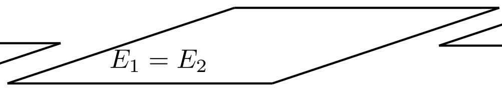
Schnittpunkt: $S(-5, -5, -3)$

Interaktive Inhalte: hier klicken

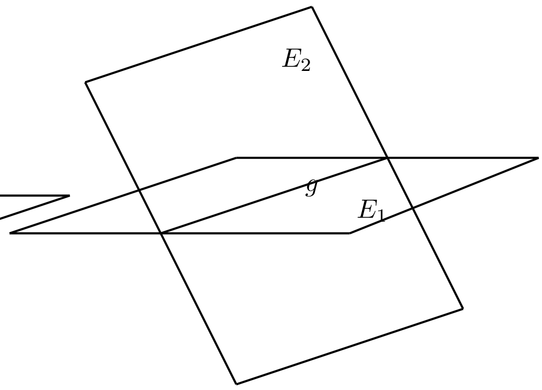
6.6.5 Ebene - Ebene



Ebenen sind parallel



Ebenen sind identisch



Ebenen schneiden sich

Parameterform - Koordinatenform

Parameterform - Ebene1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform - Ebene2

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$

Ebene1 in Punktdarstellung

$x_1 = a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma$

$x_2 = a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma$

$x_3 = a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$n_1(a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma)+$

$n_2(a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma)+$

$n_3(a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma) + k1 = 0$

Die Gleichung nach einer Variablen auflösen

• Schnittgerade zwischen den Ebenen

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. λ oder σ in die Parameterform einsetzen

• Ebenen sind parallel

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $Konstante = 0$

• Ebenen sind identisch

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $0 = 0$

Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ebene: $1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0 = 0$

$$\begin{array}{llll} x_1 = & -2 & +1\lambda & +0\sigma \\ x_2 = & -4 & +2\lambda & -1\sigma \\ x_3 = & 2 & +2\lambda & -1\sigma \end{array}$$

$1(-2 + 1\lambda + 0\sigma) + 1(-4 + 2\lambda - 1\sigma) + 0(2 + 2\lambda - 2\sigma) + 0 = 0$

$3\lambda - 1\sigma - 6 = 0$

$\sigma = \frac{-3\lambda+6}{-1}$

$\sigma = 3\lambda - 6$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3\lambda - 6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Parameterform - Parameterform

Eine Ebene in die Koordinatenform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Koordinatenform - Koordinatenform

Eine Ebene in die Parameterform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Interaktive Inhalte: hier klicken

7 Tabellen

7.1 Umrechnungen

Interaktive Umrechnungen
hier klicken

7.1.1 Zehnerpotenz

Eins	10^0	1	Eins	10^0	1
Zehn	10^1	10	Zehntel	10^{-1}	$0,1$
Hundert	10^2	100	Hundertstel	10^{-2}	$0,01$
Tausend	10^3	1000	Tausendstel	10^{-3}	$0,001$
Zehntausend	10^4	10000	Zehntausendstel	10^{-4}	$0,0001$
Hunderttausend	10^5	100000	Hunderttausendstel	10^{-5}	$0,00001$
Million	10^6	1000000	Millionstel	10^{-6}	$0,000001$
	10^7	10000000		10^{-7}	$0,0000001$
	10^8	100000000		10^{-8}	$0,00000001$
Milliarde	10^9	1000000000		10^{-9}	$0,000000001$
	10^{10}	10000000000		10^{-10}	$0,0000000001$
	10^{11}	100000000000		10^{-11}	$0,00000000001$
Billion	10^{12}	1000000000000		10^{-12}	$0,000000000001$
	10^{13}	10000000000000		10^{-13}	$0,0000000000001$
	10^{14}	100000000000000		10^{-14}	$0,00000000000001$
Billiarde	10^{15}	1000000000000000		10^{-15}	$0,000000000000001$
	10^{16}	10000000000000000		10^{-16}	$0,0000000000000001$
	10^{17}	100000000000000000		10^{-17}	$0,00000000000000001$
Trillion	10^{18}	1000000000000000000		10^{-18}	$0,000000000000000001$
	10^{19}	10000000000000000000		10^{-19}	$0,0000000000000000001$
	10^{20}	100000000000000000000		10^{-20}	$0,00000000000000000001$
Trilliarde	10^{21}	1000000000000000000000		10^{-21}	$0,000000000000000000001$
	10^{22}	10000000000000000000000		10^{-22}	$0,0000000000000000000001$
	10^{23}	100000000000000000000000		10^{-23}	$0,00000000000000000000001$
Quadrillion	10^{24}	1000000000000000000000000		10^{-24}	$0,000000000000000000000001$

7.1.2 Längen

	m	dm	cm	mm	μm	nm	pm	km
m	1	10	100	1000	10^6	10^9	10^{12}	$0,001$
dm	$0,1$	1	10	100	10^5	10^8	10^{11}	$0,0001$
cm	$0,01$	$0,1$	1	10	10^4	10^7	10^{10}	10^{-5}
mm	$0,001$	$0,01$	$0,1$	1	1000	10^6	10^9	10^{-6}
μm	10^{-6}	10^{-5}	$0,0001$	$0,001$	1	1000	10^6	10^{-9}
nm	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	$0,001$	1	1000	10^{-12}
pm	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1	10^{-15}
km	1000	10^4	10^5	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	1

m	Meter
dm	Dezimeter
cm	Zentimeter
mm	Millimeter
μm	Mikrometer
nm	Nanometer
pm	Pikometer
km	Kilometer

7.1.3 Flächen

	m^2	dm^2	cm^2	mm^2	a	ha	km^2
m^2	1	100	10^4	10^6	$0,01$	$0,0001$	10^{-6}
dm^2	$0,01$	1	100	10^4	$0,0001$	10^{-6}	10^{-8}
cm^2	$0,0001$	$0,01$	1	100	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
mm^2	10^{-6}	$0,0001$	$0,01$	1	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}
a	100	10^4	10^6	10^8	1	$0,01$	$0,0001$
ha	10^4	10^6	10^8	10^{10}	100	1	$0,01$
km^2	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^4	100	1

m^2	Quadratmeter
dm^2	Quadratdezimeter
cm^2	Quadratzentimeter
mm^2	Quadratmillimeter
a	Ar
ha	Hektar
km^2	Quadratkilometer

7.1.4 Volumen

	m^3	dm^3	cm^3	mm^3	l	hl	ml
m^3	1	1000	10^6	10^9	1000	10	10^6
dm^3	$0,001$	1	1000	10^6	1	$0,01$	1000
cm^3	10^{-6}	$0,001$	1	1000	$0,001$	10^{-5}	1
mm^3	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1	10^{-6}	10^{-8}	$0,001$
l	$0,001$	1	1000	10^6	1	$0,01$	1000
hl	$0,1$	100	10^5	10^8	100	1	10^5
ml	10^{-6}	$0,001$	1	1000	$0,001$	10^{-5}	1

m^3	Kubikmeter
dm^3	Kubikdezimeter
cm^3	Kubikzentimeter
mm^3	Kubikmillimeter
l	Liter
hl	Hektoliter
ml	Milliliter

7.1.5 Zeit

	s	min	h	ms	μs	ns	ps
s	1	$0,01667$	$0,0002778$	1000	10^6	10^9	10^{12}
min	60	1	$0,01667$	$6 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{13}$
h	3600	60	1	$3,6 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^9$	$3,6 \cdot 10^{12}$	$3,6 \cdot 10^{15}$
ms	$0,001$	$1,667 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-7}$	1	1000	10^6	10^9
μs	10^{-6}	$1,667 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-10}$	$0,001$	1	1000	10^6
ns	10^{-9}	$1,667 \cdot 10^{-11}$	$2,778 \cdot 10^{-13}$	10^{-6}	$0,001$	1	1000
ps	10^{-12}	$1,667 \cdot 10^{-14}$	$2,778 \cdot 10^{-16}$	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1

s	Sekunden
min	Minuten
h	Stunden
ms	Millisekunden
μs	Mikrosekunden
ns	Nanosekunden
ps	Pikosekunden

7.1.6 Winkel

	°	′	″	gon	rad	$mrad$
°	1	60	3600	$1,111$	$0,01745$	$1,745 \cdot 10^{-5}$
′	$0,01667$	1	60	$0,01852$	$0,0002909$	$2,909 \cdot 10^{-7}$
″	$0,0002778$	$0,01667$	1	$0,0003086$	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$4,848 \cdot 10^{-9}$
gon	$0,9$	54	3240	1	$0,01571$	$1,571 \cdot 10^{-5}$
rad	$57,3$	3438	$2,063 \cdot 10^{5}$	$63,66$	1	$0,001$
$mrad$	$5,73 \cdot 10^{4}$	$3,438 \cdot 10^{6}$	$2,063 \cdot 10^{8}$	$6,366 \cdot 10^{4}$	1000	1

°	Grad (360°)
′	Winkelminute
″	Winkelsekunde
gon	Neugrad
rad	Radiant (Bogenmaß)
$mrad$	Milliradiant

7.1.7 Dezimale Einheiten

B		d	c	m	μ	n	p	f	a	da	h	k	M	G	T	P	E
B	1	10	100	1000	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
d	$0,1$	1	10	100	10^{5}	10^{8}	10^{11}	10^{14}	10^{17}	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	10^{-7}	10^{-10}	10^{-13}	10^{-16}	10^{-19}
c	$0,01$	$0,1$	1	10	10^{4}	10^{7}	10^{10}	10^{13}	10^{16}	$0,001$	$0,0001$	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-17}	10^{-20}
m	$0,001$	$0,01$	$0,1$	1	1000	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	$0,0001$	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}
μ	10^{-6}	10^{-5}	$0,0001$	$0,001$	1	1000	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}
n	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	$0,001$	1	1000	10^{6}	10^{9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}
p	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1	1000	10^{6}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}
f	10^{-15}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1	1000	10^{-16}	10^{-17}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}	10^{-33}
a	10^{-18}	10^{-17}	10^{-16}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1	10^{-19}	10^{-20}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}	10^{-33}	10^{-36}
da	10	100	1000	10^{4}	10^{7}	10^{10}	10^{13}	10^{16}	10^{19}	1	$0,1$	$0,01$	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-17}
h	100	1000	10^{4}	10^{5}	10^{8}	10^{11}	10^{14}	10^{17}	10^{20}	10	1	$0,1$	$0,0001$	10^{-7}	10^{-10}	10^{-13}	10^{-16}
k	1000	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	100	10	1	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
M	10^{6}	10^{7}	10^{8}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{5}	10^{4}	1000	1	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
G	10^{9}	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	1000	1	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}
T	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{6}	1000	1	$0,001$	10^{-6}
P	10^{15}	10^{16}	10^{17}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{33}	10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	1000	1	$0,001$
E	10^{18}	10^{19}	10^{20}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{33}	10^{36}	10^{17}	10^{16}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	1000	1

B	Bezugsgröße
d	Dezi
c	Zenti
m	Milli
μ	Mikro
n	Nano
p	Pico
f	Femto
a	Atto
da	Deka
h	Hekto
k	Kilo
M	Mega
G	Giga
T	Tera
P	Peta
E	Exa

7.2 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Nü
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π ϖ	Pi
E	ϵ ε	Epsilon	P	ρ ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ ς	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
T	θ ϑ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ φ	Phi
K	κ $\varkappa$	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mü	Ω	ω	Omega